4rc oil

GÉOMÉTRIE

ANALYTIQUE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

GÉOMÉTRIE

ANALYTIQUE,

Par A. DELISLE,

Chevalier de la Légion d'honneur, Examinateur pour l'admission à l'École navale, Professeur émérite et Officier de l'Université;

ET

Camille Christophe GERONO,

Professeur de Mathématiques.

É PARIS,

MALLET-BACHELIER, GENDRE ET SUCCESSEUR DE BACHELIER,

Imprimeur-Libraire

DU BUREAU DES LONGITUDES ET DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1854

$2.75

EXTRAIT DU PROGRAMME OFFICIEL.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

ENSEIGNEMENT COMPLÉMENTAIRE.

GÉOMÉTRIE A DEUX DIMENSIONS.

Des équations et des formules de la géométrie.

Des coordonnées rectilignes.

Des équations du premier et du deuxième degré à deux variables.

Des tangentes et des asymptotes.

Le coefficient d'inclinaison, sur l'axe des abscisses,

De l'ellipse.

Des coordonnées rectilignes.

De la ligne droite et du plan.

Surfaces du second degré.

Sections rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe.

Sections rectilignes du paraboloïde hyperbolique.

Des surfaces coniques et cylindriques.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.
GÉOMÉTRIE A DEUX DIMENSIONS.

CHAPITRE PREMIER.
DES PROBLÈMES DÉTERMINÉS.

§ I. — *Notions préliminaires.*

§ II. — *Construction des expressions algébriques.*

§ III. — *Des valeurs négatives, ou imaginaires des inconnues.*

§ IV. — *Applications à des exemples.*

CHAPITRE DEUXIÈME.
DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

CHAPITRE TROISIÈME.
CLASSIFICATION DES LIGNES.

CHAPITRE QUATRIÈME.
LIGNES DU PREMIER ORDRE.

CHAPITRE CINQUIÈME.

DU CERCLE.

CHAPITRE SIXIÈME.

DE LA TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

CHAPITRE SEPTIÈME.

LIGNES DU SECOND ORDRE.

CHAPITRE HUITIÈME.

RÉDUCTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ A SES FORMES LES PLUS SIMPLES.

CHAPITRE NEUVIÈME.

DE L'ELLIPSE.

CHAPITRE DIXIÈME.

DE L'HYPERBOLE.

CHAPITRE ONZIÈME.

DE LA PARABOLE.

CHAPITRE DOUZIÈME.

QUESTIONS RELATIVES AUX COURBES DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE TREIZIÈME.

DE LA SIMILITUDE DES COURBES.

CHAPITRE QUATORZIÈME.

IDENTITÉ DES COURBES DU SECOND ORDRE ET DES SECTIONS CONIQUES ET CYLINDRIQUES.

CHAPITRE QUINZIÈME.

DES COORDONNÉES POLAIRES.

*

CHAPITRE SEIZIÈME.

DES TANGENTES EN GÉNÉRAL.

CHAPITRE DIX-SEPTIÈME.

DES ASYMPTOTES EN GÉNÉRAL.

CHAPITRE DIX-HUITIÈME.

DU CENTRE, DES DIAMÈTRES ET DES AXES.

CHAPITRE DIX-NEUVIÈME.

FORME DES COURBES.

CHAPITRE VINGTIÈME.

USAGE DES COURBES DANS QUELQUES QUESTIONS D'ALGÈBRE.

DEUXIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE A TROIS DIMENSIONS.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORÈMES SUR LES PROJECTIONS.

CHAPITRE DEUXIÈME.

DES COORDONNÉES ET DES LIEUX DANS L'ESPACE.

CHAPITRE TROISIÈME.

PROBLÈMES SUR LA LIGNE DROITE.

CHAPITRE QUATRIÈME.

DU PLAN.

CHAPITRE CINQUIÈME.

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES RECTILIGNES.

CHAPITRE SIXIÈME.

SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

Discussion des surfaces douées d'un centre.

Discussion des surfaces dépourvues de centre.

Nature des sections planes des surfaces du second degré.

CHAPITRE SEPTIÈME.

DE LA DISCUSSION D'UNE ÉQUATION NUMÉRIQUE DU SECOND DEGRÉ A TROIS VARIABLES.

§ I. — *Surfaces qui ont un centre unique.*

§ II. — *Surfaces qui ont une infinité de centres.*

§ III. — *Surfaces dépourvues de centre.*

§ IV. — *Application à des exemples numériques.*

CHAPITRE HUITIÈME.

DES SURFACES SPHÉRIQUES, CONIQUES ET CYLINDRIQUES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

GÉOMÉTRIE

ANALYTIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

DES PROBLÈMES DÉTERMINÉS.

§ I. — *Notions préliminaires.*

1. La *Géométrie analytique*, qu'on nomme aussi *Application de l'Algèbre à la Géométrie*, a pour objet de faire connaître l'usage de l'Algèbre dans les recherches géométriques.

Viète eut, le premier, l'idée de représenter les grandeurs géométriques par les symboles de l'algèbre, et de traduire en équations les propriétés de l'étendue. Par là on parvient souvent à résoudre d'une manière simple des problèmes qui présenteraient de grandes difficultés, si l'on voulait les traiter par les seuls moyens que fournit la géométrie. Descartes eut une idée plus profonde encore que celle de Viète : il appliqua l'algèbre à la théorie des courbes, qu'il représenta par des équations ; il est regardé comme l'inventeur de la *Géométrie analytique*. Ses méthodes, remarquables par leur fécondité et leur simplicité, appliquées d'abord aux lignes planes, ont été étendues aux surfaces et aux courbes quelconques. De là vient la distinction de *Géométrie analytique à deux* ou *à trois dimensions*.

2. Nous commencerons par faire usage de la méthode de Viète, dans la résolution des problèmes déterminés.

On sait que les grandeurs géométriques peuvent être représentées par des nombres qui ne sont autre chose que les rapports de ces grandeurs à l'unité de leur espèce. Pour généraliser, on remplace ces nombres par des lettres, et l'on conçoit par là comment les questions de géométrie peuvent être soumises au calcul algébrique. Ordinairement les grandeurs données sont représentées par les premières lettres de l'alphabet, et les inconnues par les dernières.

Prenons d'abord quelques exemples faciles à traiter.

Problème I. — *Inscrire un carré dans un triangle.*

Soit ABC (*fig.* 1) le triangle donné. Supposons le problème résolu et désignons par FDEG le carré inscrit. En représentant BC par a, la hauteur AH par h, et le côté du carré par x; comme les bases de deux triangles semblables sont proportionnelles aux hauteurs, on a

$$x : a :: h - x : h,$$

HK étant égal au côté du carré.

De la proportion on tire

$$hx = ah - ax,$$

d'où

$$(a + h)x = ah \quad \text{et} \quad x = \frac{ah}{a + h};$$

ce qui revient à

$$a + h : h :: a : x.$$

La distance x est donc quatrième proportionnelle aux trois lignes $a + h$, h et a. Pour construire cette quatrième proportionnelle, nous prendrons HL$=a$; à la suite LM$=h$; nous joindrons A et M par la droite AM, et nous mènerons LK parallèle à AM. Nous obtiendrons alors

$$\text{HM} : \text{AH} :: \text{HL} : \text{HK}, \quad \text{ou} \quad a + h : h :: a : \text{HK}.$$

La distance x ou HK étant déterminée, il suffit, pour achever la solution, de conduire DKE parallèle à CB, et d'a-

baisser sur cette dernière droite les deux perpendiculaires EG et DF.

3. PROBLÈME II. — *Diviser une droite* AB (fig. 2) *en moyenne et extrême raison.*

Soit C le point où la ligne est divisée comme on le demande; en désignant AB par a, et le plus grand segment AC par x, on aura

$$a : x :: x : a - x,$$

d'où

$$x^2 = a^2 - ax \quad \text{et} \quad x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Résolvant cette équation, on a

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}.$$

La première valeur est positive et la seconde négative. Cette dernière ne convient pas à la question.

Si nous voulons construire la première ligne, nous remarquerons que le radical $\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont les côtés de l'angle droit sont a et $\frac{a}{2}$. Alors nous élèverons au point B une perpendiculaire BD égale à $\frac{a}{2}$; et la droite AD représentera le radical. En décrivant du point D comme centre, avec le rayon BD, une circonférence rencontrant en E la droite DA, on aura

$$AE = AD - ED = AD - DB = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} - \frac{a}{2}.$$

La droite AE est, par conséquent, la première valeur de x qu'il faudra porter de A en C, sur la droite AB.

Nous interpréterons par la suite la valeur négative, et nous reviendrons sur la solution du premier problème.

4. Dans les deux exemples précédents, nous avons supposé le problème résolu; puis nous avons cherché à déterminer

et comme

$$CE = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} a,$$

et que le triangle rectangle CEB donne

$$\overline{CE}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{BC}^2,$$

il s'ensuit qu'on a

$$\frac{a^2}{4} + \frac{x^4}{c^2} = x^2,$$

équation qui, étant résolue, donnera la valeur de x.

On voit que, dans chaque cas, le calcul par lequel on parvient à l'équation est en tout semblable; que l'équation obtenue est toujours la même, avec la seule différence que la même ligne est désignée tantôt par une lettre, tantôt par une autre, selon qu'elle est considérée comme connue ou comme inconnue. Il est vrai que, selon qu'on prendra la même ligne pour connue ou pour inconnue, il naîtra une différence dans la manière de résoudre l'équation. En effet, l'équation

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^4}{x^2} = b^2$$

donne

$$x = + \frac{2b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}, \text{ valeur de AB};$$

l'équation

$$\frac{x^2}{4} + \frac{b^4}{c^2} = b^2$$

donne

$$x = \frac{2b}{c}\sqrt{c^2 - b^2}, \text{ valeur de CD};$$

et l'équation

$$\frac{a^2}{4} + \frac{x^4}{c^2} = x^2$$

donne

$$x = \sqrt{\frac{c^2}{2} \pm \sqrt{\frac{c^4 - a^2c^2}{4}}}, \text{ valeur de BC ou BD.}$$

Lors donc qu'un problème est proposé, comparez entre elles toutes les quantités qu'il renferme; examinez comment, quelques-unes de ces quantités étant connues, vous pourriez, par un procédé synthétique, parvenir à trouver les autres: pour cela, il n'est pas nécessaire de reconnaître du premier coup d'œil par quelle marche le calcul algébrique conduira des premières quantités aux autres, il suffit de sentir, en général, que les unes peuvent être déduites des autres par un moyen quelconque.

5. Par exemple, si l'on proposait une question qui eût pour objet le diamètre AD (*fig.* 4), et les trois cordes AB, BC, CD inscrites dans un demi-cercle; et que, toutes les autres étant données, on cherchât BC; au premier aperçu, on voit que le diamètre AD détermine nécessairement le demi-cercle, et qu'ensuite les lignes AB et CD, par leur inscription, déterminent aussi les points B et C, et, par conséquent, la ligne BC qu'on cherche. Et cela, par le moyen le plus direct. Mais on ne découvre pas avec la même facilité par quel chemin l'analyse conduit des quantités données à la ligne cherchée BC. Il en serait de même s'il fallait chercher AB ou CD, le reste étant donné.

Mais, si AB, BC, CD étaient données, et qu'il fallût chercher le diamètre AD, on aperçoit à l'instant que le problème n'est pas possible par la synthèse, parce que la distance des points A, D dépend de l'ouverture des angles B, C; que ces angles dépendent du cercle dans lequel les lignes données doivent être inscrites, et que ce cercle n'est pas donné, puisque son diamètre est supposé inconnu.

La nature du problème ne permet donc pas de trouver synthétiquement le diamètre AD; alors il faut traiter la

question comme si le diamètre était connu, pour remonter aux quantités données.

Lorsqu'on aura bien saisi les différents moyens par lesquels chaque terme d'une question peut être déterminé, alors parmi toutes les lignes qui doivent entrer dans l'état de cette question, on regardera comme connues les lignes qui présenteront la route la plus facile pour arriver à la connaissance des autres. C'est toujours par ces lignes que le calcul doit commencer, quoique, dans le cours de l'opération, on puisse en introduire d'autres. Le moyen le plus court est de mettre, pour un moment, de côté la question qu'on veut résoudre, et de s'imaginer qu'il s'agit uniquement de choisir parmi toutes les quantités qui doivent entrer dans le problème, celles qui, étant supposées connues, mèneraient plus facilement à la connaissance des autres.

Ainsi, dans l'exemple précédent, si c'est le diamètre AD que l'on cherche, il est aisé de voir qu'on ne peut pas le trouver par un moyen synthétique; mais on s'aperçoit bien vite que, si ce diamètre était connu, on arriverait aux autres quantités par la route la plus directe; on regarde donc AD comme connu, et l'on établit le calcul comme s'il l'était véritablement, et qu'il fût question de trouver quelqu'une des lignes données AB, BC ou CD. Par ce moyen, on obtient les rapports qui existent entre les quantités qu'on traite comme connues, et les autres, et l'on arrive toujours à une équation entre deux valeurs d'une même quantité, soit que l'une des valeurs résulte du nom donné à cette quantité au commencement de l'opération et que l'autre ait été trouvée par le calcul, soit que toutes deux aient été trouvées par des opérations différentes d'analyse.

« Au reste, le plus difficile n'est pas de concevoir les re-
» lations générales des termes d'une question, mais bien de
» saisir certaines liaisons des lignes entre elles, certains

» rapports plus propres que d'autres à être soumis au cal-
» cul. Car il arrive fréquemment que des relations qui pa-
» raissent immédiates au premier coup d'œil, entraînent
» dans de longs circuits lorsqu'on les traite analytiquement,
» et forcent souvent à recommencer l'opération par de nou-
» veaux moyens. Il ne faut donc employer que les proposi-
» tions ou les énoncés les plus propres à être exprimés par
» les calculs de l'algèbre. »

Ces propositions sont, en général, celles qui concernent les lignes proportionnelles, et les propriétés du triangle rectangle. Nous supposons, toutefois, qu'il s'agit ici de questions relatives aux lignes; car, si l'on traitait de questions relatives aux surfaces ou bien aux solides, il est clair qu'il faudrait recourir à d'autres propositions de la géométrie élémentaire.

Dans la résolution des questions de la première espèce, on est généralement conduit, pour obtenir soit des triangles semblables, soit des triangles rectangles, à employer des lignes auxiliaires. Les problèmes que nous résoudrons offriront des exemples de cette remarque importante.

Maintenant, occupons-nous de la question proposée.

Première solution. — En supposant le problème résolu, menons la diagonale BD (*fig.* 4), et abaissons du point B la perpendiculaire BE, sur le prolongement de DC. Les triangles rectangles ABD, BCE seront semblables : car l'angle A du quadrilatère inscrit ABCD, et l'angle BCE du triangle BEC, ont le même supplément, BCD.

Cela posé, désignons par a, b, c les cordes AB, BC, CD, et par x le diamètre AD; on aura

$$\text{AD} : \text{AB} :: \text{BC} : \text{CE}, \quad \text{ou} \quad x : a :: b : \text{CE} = \frac{ab}{x};$$

d'où l'on déduit

$$\text{DE} = \text{DC} + \text{CE} = c + \frac{ab}{x}.$$

Le triangle rectangle BCE donne

$$\overline{BC}^2 - \overline{CE}^2 = \overline{BE}^2, \quad \text{ou} \quad b^2 - \frac{a^2b^2}{x^2} = \overline{BE}^2.$$

Le triangle rectangle BDE donne

$$\overline{BD}^2 - \overline{DE}^2 = \overline{BE}^2;$$

mais, le triangle rectangle BAD conduisant à

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2 = x^2 - a^2,$$

il vient

$$x^2 - a^2 - \left(c + \frac{ab}{x}\right)^2 = \overline{BE}^2.$$

Égalant les deux valeurs de $\overline{BE}^2$, on obtient l'équation

$$x^2 - a^2 - \left(c + \frac{ab}{x}\right)^2 = b^2 - \frac{a^2b^2}{x^2}.$$

Développant les calculs, on trouve

$$x^2 - a^2 - \left(c^2 + \frac{2abc}{x} + \frac{a^2b^2}{x^2}\right) = b^2 - \frac{a^2b^2}{x^2}.$$

Supprimant de part et d'autre $-\frac{a^2b^2}{x^2}$, et réduisant, on a l'équation

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0.$$

Deuxième solution. — Soit encore

$$AD = x, \quad AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c.$$

Alors

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2 = x^2 - a^2, \quad CE = \frac{ab}{x},$$

comme précédemment. L'angle BCD étant obtus, on a, d'après une proposition connue,

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2\,CD.CE,$$

ou

$$x^2 - a^2 = b^2 + c^2 + \frac{2abc}{x};$$

d'où l'on tire facilement

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0.$$

Troisième solution. — Soit encore

$$AD = x, \quad AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c.$$

Par une propriété connue du quadrilatère inscrit, on a

$$AD.BC + AB.CD = AC.BD.$$

Mais

$$AC = \sqrt{x^2 - c^2}, \quad \text{et} \quad BD = \sqrt{x^2 - a^2};$$

donc

$$bx + ac = \sqrt{x^2 - c^2}.\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Élevant au carré les deux membres de cette équation, il vient

$$b^2x^2 + 2abcx + a^2c^2 = x^4 - (a^2 + c^2)x^2 + a^2c^2.$$

Ordonnant, on a

$$x^4 - (a^2 + b^2 + c^2)x^2 - 2abcx = 0.$$

Supprimant la solution $x = 0$, qui ne peut convenir, on arrive à l'équation déjà obtenue

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0.$$

On voit, par cet exemple, comment on peut souvent varier les solutions d'un problème.

6. Proposons-nous encore le problème suivant :

Par un point C, *pris sur la bissectrice de l'angle droit* HAL (fig. 5), *mener une droite*, CEF, *de manière que la partie* EF *de cette droite comprise entre les côtés de l'angle droit prolongés, s'il est nécessaire, soit égale à une ligne donnée.*

Première solution. — Faisons $AF = x$, et formons le carré ABCD, dont nous désignerons le côté par a; représentons la longueur donnée EF par b. Nous aurons

$$BF = x + a, \quad AE = \sqrt{b^2 - x^2},$$

et la proportion

$$AF : AE :: BF : BC, \quad \text{ou} \quad x : \sqrt{b^2 - x^2} :: x + a : a;$$

ce qui donne

$$(x + a)\sqrt{b^2 - x^2} = ax.$$

Élevant au carré et ordonnant, il vient

$$(1) \qquad x^4 + 2ax^3 - (b^2 - 2a^2)x^2 - 2ab^2x - a^2b^2 = 0,$$

équation complète du quatrième degré.

Deuxième solution. — Formons le carré ABCD, et divisons la droite EF en deux parties égales au point G; faisons

$$CD = a, \quad EG \text{ ou } FG = b \quad \text{et} \quad CG = x;$$

nous aurons

$$CE = x - b, \quad CF = x + b.$$

Ensuite, comme $\overline{CF}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BF}^2$, il viendra

$$BF = \sqrt{(x + b)^2 - a^2},$$

et à cause des triangles semblables CDE, FBC, on a

$$CE : CD :: CF : BF, \quad \text{ou} \quad x - b : a :: x + b : \sqrt{(x + b)^2 - a^2};$$

d'où l'on tire

$$ax + ab = (x - b)\sqrt{(x + b)^2 - a^2}.$$

Élevant chaque membre au carré et ordonnant, on a

$$x^4 - 2(a^2 + l^2)x^2 - 2a^2b^2 + b^4 = 0,$$

équation bicarrée, et de laquelle on tire

$$x = \pm\sqrt{a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 + 4a^2b^2}}.$$

Troisième solution. — En remarquant que le point G (*fig.* 5) est à la circonférence d'un cercle décrit du point A comme centre avec un rayon égal à GE, on pourrait abaisser la perpendiculaire GK sur la diagonale AC, et chercher AK ou CK, AK par exemple; car, si cette longueur était trouvée, on élèverait la perpendiculaire KG, et son point de rencontre avec la circonférence décrite du point A servirait, avec le point C, à fixer la position de la droite CF, et le problème serait résolu.

Posons donc

$$AK = x \quad \text{et} \quad AC = e, \quad EG = b.$$

Sur EF comme diamètre, décrivons une demi-circonférence qui passera par le point A, et coupera le prolongement de CA au point M. L'angle FAM = BAC est égal à la moitié d'un droit; donc l'arc FM compris entre ses côtés est égal au quart de la circonférence; il en résulte que l'angle au centre FGM est droit. Dans le triangle rectangle MGC, on a

$$\overline{GM}^2 = MK \times MC;$$

mais

$$GM = GE = b, \quad MK = AK = x,$$

donc

$$b^2 = x(2x + e), \quad \text{ou} \quad x^2 + \frac{ex}{2} - \frac{b^2}{2} = 0,$$

équation complète du second degré.

Quatrième solution. — Élevons au point F, sur CF (*fig.* 6), la perpendiculaire FG, qui rencontre en G le prolongement de CD; et du point F menons FL perpendiculaire sur CG; faisons

$$DG = x, \quad CD = a, \quad EF = b.$$

Le triangle rectangle CFG donne

$$\overline{CG}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{FG}^2 \quad \text{et} \quad CG \times FL = CF \times FG.$$

Multipliant par 2 les deux membres de la seconde égalité, et retranchant de là première, il vient

$$(1)\qquad CG\,(CG-2FL)=(CF-FG)^2;$$

or,

$$CG=GD+DC=x+a,\quad CG-2FL=(x+a)-2a=x-a.$$

FG étant égal à CE, à cause de l'égalité des triangles rectangles FGL, CDE, on a

$$CF-FG=EF=b;$$

substituant ces valeurs dans l'égalité (1), on trouve

$$x^2-a^2=b^2,\quad \text{ou}\quad x^2=a^2+b^2,$$

équation binôme du second degré.

7. Par l'exemple qui vient d'être traité, on peut reconnaître de quelle importance est le choix de l'inconnue. Dans la première solution, en prenant pour inconnue la distance AF (*fig.* 5), nous sommes parvenus à une équation complète du quatrième degré. Ce résultat pouvait être prévu : en effet, d'après les conditions générales de l'énoncé, la longueur donnée, en la supposant suffisamment grande, peut être comprise dans chacun des trois angles HAL, HAL′, H′AL; et, dans le premier de ces trois angles, on peut mener par le point C deux droites E″CF″, E‴CF‴, égales à cette même ligne donnée; ce qui fait généralement quatre solutions. Or, si au lieu de choisir AF pour inconnue, on prenait AF′, l'équation à laquelle on serait conduit, ne différerait de la première, qu'en ce que x serait remplacée par $-x$, comme on peut s'en assurer par le calcul; et il en serait encore de même, si l'on prenait pour inconnue AF″ ou AF‴. D'après cela, on voit que les distances AF′, AF″, AF‴ représentent des racines négatives de l'équation à laquelle on parvient en posant $AF=x$: d'ail-

leurs AF est racine positive de cette équation; cette dernière devait donc être du quatrième degré.

Dans la seconde solution, nous avons pris pour inconnue la distance CG, du point C au milieu de EF. En supposant que CEF réponde à la question, si l'on prend $AF' = AE$, et que l'on mène la ligne CE'F', elle fournira une seconde solution. Nous ferons remarquer également que si E''CF'' donne une solution, en prenant $AF''' = AE''$, et menant la ligne F'''CE''', elle conviendra au problème; mais, ici, les distances CG, CG' sont égales entre elles, et il en est de même de CG'' et CG''', les points G', G'', G''' étant les milieux des droites E'F', E''F'', E'''F'''. On ne devra alors trouver pour l'inconnue que deux valeurs différentes; ce qui est conforme au résultat obtenu, l'équation étant bicarrée.

Dans la troisième solution, la valeur de l'inconnue AK (*fig.* 5) est évidemment la même pour les deux lignes CEF, CF'E'; la même remarque s'applique aux deux lignes E''CF'', E'''CF'''. On obtient donc seulement deux valeurs pour l'inconnue, ce qui est indiqué par l'équation trouvée qui est du second degré.

On peut démontrer, de la même manière, que dans la quatrième solution l'inconnue n'est susceptible que d'une seule valeur.

De cette discussion résulte cette conséquence importante, qu'il faut choisir pour inconnue celle qui doit avoir le plus petit nombre de valeurs.

8. On peut remarquer, par ces exemples, quelle variété de moyens on a pour résoudre une question; mais on doit observer en même temps que parmi tous ces moyens, il en est de bien plus expéditifs que d'autres. Nous trouvons ici l'occasion de donner une règle sur le choix des inconnues.

Lorsque deux quantités ont une telle ressemblance de

rapports avec les autres quantités de la question, qu'en prenant l'une ou l'autre pour inconnue, on arrive à des équations entièrement semblables, ou qu'en les prenant toutes deux en même temps, elles soient du même degré et entrent de la même manière dans l'équation finale, ou ne diffèrent que par les signes + et —, il faut les rejeter toutes deux également, et prendre à leur place une troisième inconnue qui ait un même rapport avec l'une et l'autre, par exemple leur demi-somme ou leur demi-différence, ou une moyenne proportionnelle, ou enfin telle quantité qu'on voudra qui ait avec elles une même relation, pourvu que cette quantité soit la seule qui jouisse de cette propriété.

§ II. — *Construction des expressions algébriques.*

9. La résolution d'un problème de géométrie par le moyen de l'algèbre se compose de trois parties principales : il faut premièrement mettre le problème en équations; 2°. résoudre l'équation ou les équations du problème; 3°. construire les valeurs obtenues. Nous avons déjà fait connaître la méthode à suivre pour traiter la première partie; la deuxième est du ressort de l'algèbre. Nous sommes donc conduits immédiatement à nous occuper de la troisième. Nous allons considérer les expressions que l'on peut construire avec la règle et le compas. Il est bien entendu que ces expressions représenteront des droites.

Lorsque l'expression est rationnelle et entière, c'est-à-dire quand on a, par exemple,

$$x = a - b + c - d\ldots,$$

a, b, c, d, etc., représentant des lignes : à partir d'un point O (*fig.* 7), pris sur une droite indéfinie X'X, on porte, les unes à la suite des autres, les lignes a, c, etc., dans le sens OX; ce qui donne une certaine longueur OD. Puis,

à partir de l'extrémité D, dans le sens DX$'$, on porte également les lignes b, d, etc. Si la somme de ces dernières lignes est plus petite que DO, et se termine en H, la droite OH représentera la valeur de x. Dans le cas où la seconde somme $b+d+$ etc. est plus grande que la première $a+c+$ etc., le point H tombe en un certain point H$'$ situé à gauche du point O, et la valeur absolue de x est représentée par OH$'$.

Quand l'expression est rationnelle et fractionnaire, on ramène sa construction à celle d'expressions de la forme $\frac{ab}{c}$, $\frac{a^2}{c}$ qui sont, l'une une quatrième proportionnelle aux lignes c, a, b, et l'autre une troisième proportionnelle aux lignes c, a.

Supposons d'abord que les deux termes de la fraction soient des monômes; qu'on ait, par exemple,

$$x=\frac{a^3bcd}{f^2gh^2}.$$

Cette fraction revient à

$$\frac{a^2}{f}\times\frac{a}{f}\times\frac{b}{g}\times\frac{c}{h}\times\frac{d}{h}.$$

Le premier facteur $\frac{a^2}{f}$ est une troisième proportionnelle, α, aux deux lignes f et a. Il en résulte

$$x=\frac{\alpha a}{f}\times\frac{b}{g}\times\frac{c}{h}\times\frac{d}{h}.$$

Le facteur $\frac{\alpha a}{f}$ est une quatrième proportionnelle, α', aux lignes f, a, α; et, par suite,

$$x=\frac{b\alpha'}{g}\times\frac{c}{h}\times\frac{d}{h}.$$

De même

$$\frac{b\alpha'}{g}=\alpha'',$$

d'où

$$x = \frac{c\alpha''}{h} \times \frac{d}{h}.$$

Posant

$$\frac{c\alpha''}{h} = \alpha''',$$

on a

$$x = \frac{d\alpha'''}{h},$$

quatrième proportionnelle aux lignes connues h, d, α'''.

On voit, par cet exemple, que, quels que soient les nombres des facteurs des deux termes, on construira l'expression en cherchant autant de quatrièmes proportionnelles qu'il y a de facteurs dans le dénominateur, en supposant, comme nous l'avons fait, que le nombre des facteurs du numérateur surpasse d'une unité le nombre des facteurs du dénominateur. Nous verrons bientôt que cette condition est remplie lorsque x représentant une droite, aucune ligne de la question n'a été prise pour unité.

Soit, maintenant,

$$x = \frac{a^2bc + d^2e^2 - fghk}{mnp};$$

ce qui revient à

$$x = \frac{a^2bc}{mnp} + \frac{d^2e^2}{mnp} - \frac{fghk}{mnp}.$$

Chacune de ces dernières fractions se construira comme précédemment, et, en désignant par a', a'', a''', les trois lignes représentées par ces trois fractions, on aura

$$x = a' + a'' - a'''.$$

Supposons enfin que les deux termes de la fraction étant des polynômes, on ait

$$x = \frac{a^2bc + d^2e^2 - fghk}{l^2m - pqr + s^2t}.$$

Cette expression revient à

$$x = \frac{a^2 b \left(c + \frac{d^2 e^2}{a^2 b} - \frac{fghk}{a^2 b}\right)}{l^2 \left(m - \frac{pqr}{l^2} + \frac{s^2 t}{l^2}\right)}.$$

Les fractions monômes $\frac{d^2 e^2}{a^2 b}$, $\frac{fghk}{a^2 b}$, $\frac{pqr}{l^2}$, $\frac{s^2 t}{l^2}$, représentant des lignes qu'on peut désigner respectivement par α, β, α', β', on aura

$$x = \frac{a^2 b\,(c + \alpha - \beta)}{l^2 (m - \alpha' + \beta')}.$$

Or, $c + \alpha - \beta$ représentant une ligne r, et $m - \alpha' + \beta'$ étant aussi une ligne δ, on obtiendra

$$x = \frac{a^2 br}{l^2 \delta},$$

fraction dont les deux termes sont des monômes.

On pourrait toutefois ramener le dernier cas à celui qui le précède, en transformant seulement le dénominateur $l^2 m - pqr + s^2 t$ en un monôme $l^2 \delta$.

Nous allons passer aux expressions irrationnelles du second degré. Le radical du second degré peut toujours se ramener à l'une des trois formes

$$\sqrt{ab}, \quad \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Soit d'abord

$$x = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \ldots.}$$

On construira le côté d'un carré α^2 équivalent à la somme des carrés a^2, c^2, etc.; puis le côté d'un autre carré β^2, équivalent à la somme des carrés b^2, d^2, etc. Il en résultera

$$x = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}.$$

On voit sans peine que x est le côté de l'angle droit d'un

triangle rectangle, ayant α pour hypoténuse, et 6 pour second côté de l'angle droit.

Soit, en second lieu :

$$x = \frac{ab}{c} + \sqrt{\frac{a^3 b}{c^2} - \frac{d^2 fg}{hl} + \frac{m^3 n}{pq}}.$$

Le terme rationnel $\frac{ab}{c}$ se construit comme on l'a déjà vu. Quant au radical, on peut l'écrire de la manière suivante :

$$\sqrt{\frac{a^2}{c} \times \frac{ab}{c} - \frac{d^2}{h} \times \frac{fg}{l} + \frac{m^2}{p} \times \frac{mn}{q}}.$$

Chacun des termes du radical, étant un produit de deux lignes, peut être remplacé par un carré. En exécutant les opérations, et en représentant les trois carrés par α^2, 6^2, γ^2, le radical deviendra

$$\sqrt{\alpha^2 - 6^2 + \gamma^2},$$

et rentrera alors dans le cas précédent.

Nous n'avons construit que les radicaux du second degré, mais la question ne présenterait pas plus de difficulté si l'indice du radical était une puissance de 2. Par exemple, soit

$$x = \sqrt[4]{\frac{a^3 b^2 c - d^2 f^2 gh + l^3 m^3}{p^2 + qr}}.$$

La valeur de x peut être mise sous la forme

$$x = \sqrt[4]{\frac{a^3 b^2 \left(c - \frac{d^2 f^2 gh}{a^3 b^2} + \frac{l^3 m^3}{a^3 b^2}\right)}{p\left(p + \frac{qr}{p}\right)}}.$$

Faisant

$$\frac{d^2 f^2 gh}{a^3 b^2} = \alpha, \quad \frac{l^3 m^3}{a^3 b^2} = 6, \quad \frac{qr}{p} = \gamma,$$

on aura

$$x = \sqrt[4]{\frac{a^3 b^2 (c - \alpha + \beta)}{p(p + \gamma)}}.$$

Mais $c - \alpha + \beta$, $p + \gamma$ sont des lignes que l'on peut représenter par α', β'; donc

$$x = \sqrt[4]{\frac{a^3 b^2 \alpha'}{p\beta'}} = \sqrt{\sqrt{\frac{a^3 b^2 \alpha'}{p\beta'}}} = \sqrt{a\sqrt{\frac{ab}{p} \times \frac{b\alpha'}{\beta'}}}.$$

Et, en observant que $\frac{ab}{p} \times \frac{b\alpha'}{\beta'}$ est un produit de deux lignes que l'on peut remplacer par un carré δ^2, il vient

$$x = \sqrt{a\delta}.$$

On n'a plus qu'à chercher une moyenne proportionnelle entre a et δ.

Nous ne traiterons pas les expressions irrationnelles qui ne sont pas susceptibles d'être ramenées à des radicaux du second degré, parce que ces expressions ne peuvent pas être construites avec la droite et le cercle qui sont les seules lignes dont on s'occupe en géométrie élémentaire.

DE L'HOMOGÉNÉITÉ.

10. On nomme *équation homogène*, *expression homogène*, une équation ou une expression dont tous les termes sont du même degré. Lorsque les lettres représentent des lignes, le degré d'un terme entier est égal au nombre des facteurs algébriques qui entrent dans ce terme. Ainsi, $8a^3 b^2 c$ est du sixième degré.

Lorsque le terme considéré est fractionnaire, son degré est le degré du numérateur diminué de celui du dénominateur; $\frac{8a^3 b^2 c}{5df}$ est du quatrième degré.

Si le terme est irrationnel, on obtient son degré en divi-

sant par l'indice du radical le degré de la quantité placée sous ce même radical; $\sqrt[3]{\frac{3a^5b^2c^4}{5df}}$ est du troisième degré.

Il résulte des définitions qui viennent d'être données que si, comme nous l'avons supposé, les lettres représentent des lignes, l'équation

$$3bx + \frac{4c^3d^2}{fg} - \sqrt[3]{\frac{2a^4b^3x^2}{3hl}} = 3c^2 - \frac{bcd}{x}$$

est homogène, et tous ses termes sont du second degré.

Il est important de faire observer qu'une équation telle que $ax + s = 3\sqrt{vx}$ est encore homogène, si a et x représentent des lignes, s une surface et v un volume, parce qu'une surface est considérée comme un produit de deux dimensions, et un volume comme un produit de trois dimensions.

11. *Principe de l'homogénéité.* — Lorsqu'en appliquant l'algèbre à la résolution d'un problème de géométrie, aucune ligne donnée dans la question n'a été prise pour unité, l'équation ou les équations qu'on obtient doivent être homogènes (*).

Ce principe est vérifié par toutes les égalités immédiatement déduites des théorèmes de la géométrie élémentaire. Ainsi, a, b, c, représentant l'hypoténuse et les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, on a l'équation homogène $a^2 = b^2 + c^2$. De même, si c représente une moyenne proportionnelle entre a et b, on a encore l'équation homogène $c^2 = ab$. Ces relations restent les mêmes, quelle que soit la ligne à laquelle on ait rapporté celles de la figure.

(*) Il est sous-entendu que les fonctions trigonométriques sont considérées comme des facteurs numériques, et, par suite, ne peuvent entrer dans l'évaluation des degrés des termes. Ainsi les termes $c \cos \alpha$, $a^2 \sin^2 \alpha$, $\frac{b^2 c}{\tan \alpha}$ sont respectivement du premier, deuxième et troisième degré.

Démontrons maintenant, d'une manière générale, le principe de l'homogénéité.

Il est clair que toute équation du problème que l'on traite exprime une relation entre certaines grandeurs, et que cette relation est indépendante des unités auxquelles on a comparé ces grandeurs, pour les exprimer en nombres.

Cette équation subsistera toujours quand on rapportera les quantités qu'elles renferment à de nouvelles unités; or, si une certaine unité devient n fois plus petite, toutes les quantités de son espèce seront exprimées par des nombres n fois plus grands; de sorte que l'équation dont il s'agit devra subsister encore lorsqu'on y donnera à chacune de ces quantités une valeur n fois plus grande. Alors, chaque terme de l'équation se trouvant multiplié par une puissance de n marquée par le degré de ce terme, tous les termes du même degré, quelle que soit leur composition, varieront dans le même rapport, tandis que les termes de degrés différents varieront dans d'autres rapports; il faudra donc, pour que l'équation ne soit pas troublée, que tous les termes qu'elle contient soient du même degré, c'est-à-dire que cette équation soit homogène.

12. L'homogénéité cesse d'exister dès qu'on suppose une des lignes données égale à l'unité, car alors les facteurs et les diviseurs égaux à cette ligne disparaissent; mais on peut la rétablir.

En effet, il est aisé de comprendre que réciproquement si, en partant d'une équation ainsi altérée, on veut lui rendre son état primitif, il suffit d'introduire le multiplicateur ou le diviseur 1, de manière que tous les termes, en comptant ces facteurs ou diviseurs 1, se trouvent être du même degré; en y remplaçant ensuite, pour plus de clarté, ce signe 1 par une lettre indéterminée, l'équation sera nécessairement revenue à la forme qu'elle aurait eue d'abord, relativement à une unité indépendante des lignes considérées.

On déduit de ce qui précède la règle suivante :

Quand une des quantités qui entrent dans la question aura été prise pour unité, il faudra, pour rétablir l'homogénéité, représenter cette quantité par une lettre et l'introduire comme multiplicateur ou comme diviseur dans les différents termes de l'équation, à des puissances telles que tous les termes aient le même degré.

Supposons qu'ayant pris une certaine ligne pour unité, on ait trouvé

$$x = \sqrt{\frac{a}{b} - \frac{c^2 d}{f^4}}.$$

On désignera par l la ligne qui a été prise pour unité et l'on multipliera les quantités sous le radical, par des puissances de l telles que tous les termes placés sous le radical soient du second degré, ce qui donnera

$$x = \sqrt{\frac{al^2}{b} - \frac{c^2 dl^3}{f^4}}.$$

§ III. — *Des valeurs négatives, ou imaginaires des inconnues.*

13. On a vu, dans l'algèbre, que les questions sur les nombres conduisent quelquefois à des valeurs négatives, soit pour toutes les inconnues, soit pour quelques-unes d'entre elles ; l'interprétation de ces valeurs s'applique, en général, aux problèmes de géométrie qu'on résout par l'analyse. Entrons, à ce sujet, dans quelques développements.

Revenons au problème du n° 3, dans lequel on propose de diviser une droite AB (*fig.* 2) en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire, comme on sait, en deux segments AC, CB, tels que AC soit moyen proportionnel entre la ligne entière AB et l'autre segment CB.

En posant AB $= a$, AC $= x$, on a

$$\text{BC} = a - x,$$

et, par suite,

$$x^2 = a(a - x), \quad \text{d'où} \quad x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

La première valeur positive et plus petite que a, convient à la question, en déterminant un point C situé entre A et B; mais la seconde valeur, qui est négative, ne peut pas être considérée comme une réponse au problème tel qu'il est énoncé. D'après la méthode suivie en algèbre, changeons dans l'équation le signe de x, elle devient

$$x^2 = a(a + x),$$

et conduit à

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

L'équation qu'on vient de résoudre est celle à laquelle on parviendrait si l'on cherchait sur le prolongement de BA un point C′ dont la distance au point A fût moyenne proportionnelle entre sa distance au point B et la droite AB; il résulte de là que si l'on porte la valeur positive de x comme on l'a fait de A en C, et la valeur négative de A en C′ à gauche de A, on aura les deux solutions du problème suivant : *Trouver sur la droite indéfinie qui passe par deux points donnés* A *et* B, *un point dont la distance au point* A *soit moyenne proportionnelle entre sa distance au point* B *et la longueur connue* AB. Énoncé de cette manière, le problème est généralisé, puisque le point que l'on cherche n'est plus assujetti à la condition visiblement trop restreinte, d'être situé entre A et B; en effet, on reconnaît sans peine que la distance au point A d'un point C′ situé sur le prolongement de BA, peut être moyenne proportionnelle entre la distance de ce point C′ au point B et la longueur AB.

On aurait pu se proposer d'abord cette question géné-

rale. Alors, en regardant le problème comme résolu, et supposant que le point C fût le point demandé, on serait arrivé en posant AC $= x$ à la même équation

$$(1) \qquad x^2 = a(a - x),$$

et aux mêmes valeurs de x. Mais on aurait introduit dès le commencement du calcul une restriction que ne comporte pas l'énoncé, puisqu'on aurait supposé le point C situé entre A et B. La valeur positive est la seule qui convienne à cette supposition, et la valeur négative, étant prise positivement et portée du côté AX, opposé à celui où l'on a cherché le point C, détermine la seconde solution du problème.

Il résulte de ce qu'on vient de voir, que la valeur négative sert tantôt à généraliser un problème dont le proposé n'est qu'un cas particulier, tantôt à faire disparaître une restriction, d'abord nécessaire, pour mettre le problème en équation.

Mais il est important de remarquer que la valeur négative prise d'une manière absolue, a été portée en sens contraire à celui dans lequel on a placé la distance cherchée.

De là ce principe adopté :

Lorsqu'on applique l'algèbre à la résolution d'un problème de géométrie et qu'on prend pour inconnue une distance comptée sur une ligne donnée à partir d'un point fixe situé sur cette ligne, les valeurs négatives de cette inconnue doivent être portées en sens opposé à celui où l'on a supposé que cette distance était placée.

14. L'application de l'algèbre à la résolution d'un problème de géométrie peut donner pour l'inconnue ou les inconnues des valeurs imaginaires. Ces valeurs indiquent souvent l'impossibilité du problème; nous ne devons pas

dire qu'elles indiquent toujours l'impossiblité, car il y a des cas, comme nous allons le faire voir, où ces valeurs proviennent d'une fausse hypothèse établie pour mettre le problème en équation.

Reprenons le problème du n° 3, et supposons que le point demandé soit situé en C″ (*fig.* 2) du côté BY. Faisons

$$BC'' = x, \quad AB = a,$$

AC″ sera égal à $a + x$, et, d'après les conditions de l'énoncé, nous aurons l'équation

$$(a + x)^2 = ax, \quad \text{ou} \quad x^2 + ax + a^2 = 0;$$

ce qui conduit à

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{-3a^2}{4}},$$

valeurs qui sont imaginaires.

Nous savons déjà que la question, en elle-même, n'est pas impossible, puisque nous avons trouvé deux solutions; l'une de ces solutions donnant un point entre A et B, et l'autre un point situé à gauche de A.

L'impossibilité provient ici de la supposition faite en commençant, supposition qui plaçait le point cherché au delà du point B, par rapport au point A. On voit, en effet, qu'une telle hypothèse est inadmissible, puisque la distance AC″, qui devrait être moyenne proportionnelle entre les longueurs AB, BC″, est plus grande que chacune d'elles.

15. Nous devons faire remarquer qu'une valeur positive de l'inconnue ou de l'une des inconnues, n'est pas toujours une réponse à la question qui a fourni cette valeur.

Soit proposé, par exemple, le problème suivant:

Connaissant l'hypoténuse BC (fig. 8), *et la somme* AB + AC + AD *des côtés de l'angle droit et de la hauteur d'un triangle rectangle, déterminer le triangle.*

Soient $BC = a$, $AB + AC + AD = b$. En posant $AD = x$,

$AB = y$, il en résultera d'abord

$$AC = b - x - y.$$

Le triangle rectangle BAC donnera

$$y^2 + (b - x - y)^2 = a^2,$$

ou

$$(1) \qquad 2y^2 + x^2 + 2xy - 2bx - 2by + b^2 - a^2 = 0.$$

De plus, à cause de la similitude des triangles rectangles BAC, CAD, on a

$$a : y :: b - x - y : x,$$

d'où l'on tire

$$y^2 + xy - by + ax = 0,$$

ou bien, en multipliant par 2,

$$(2) \qquad 2y^2 + 2xy - 2by + 2ax = 0.$$

Retranchant l'équation (2) de (1), il vient

$$x^2 - 2bx - 2ax + b^2 - a^2 = 0;$$

d'où

$$x = a + b \pm \sqrt{2a^2 + 2ab}.$$

La première valeur est évidemment positive, la seconde est aussi positive, car la quantité $2a^2 + 2ab$ pouvant être remplacée par $a^2 + a^2 + 2ab$, est plus petite que le carré de $(a + b)$, puisque a, hypoténuse du triangle, est nécessairement moindre que b qui représente la somme des côtés de l'angle droit, augmentée de la hauteur.

La hauteur du triangle étant évidemment plus petite que b, et, à plus forte raison, que $a + b$, la première valeur de x ne peut être une réponse au problème.

16. On sait que les racines d'une équation du second degré à une inconnue peuvent être imaginaires ou réelles; proposons-nous de les construire lorsqu'elles tombent dans ce dernier cas. L'équation du second degré, en ayant égard

aux signes des termes, peut avoir l'une des formes suivantes :

(1) $$x^2 - px + q = 0,$$

(2) $$x^2 - px - q = 0,$$

(3) $$x^2 + px + q = 0,$$

(4) $$x^2 + px - q = 0.$$

Lorsque x et p représentent des lignes, il faut, pour l'homogénéité, que le dernier terme q représente une surface. Désignons par b^2 le carré équivalent. Alors l'équation (1) devient

$$x^2 - px + b^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x(p - x) = b^2.$$

On voit que cette équation est la traduction algébrique de l'énoncé du problème suivant : *Construire un rectangle, connaissant la surface* b² *et la somme* p *des côtés adjacents.*

Prenons $AB = p$ (*fig.* 9); sur cette ligne comme diamètre décrivons une demi-circonférence ; en un point quelconque B, élevons sur AB la perpendiculaire $BC = b$; par l'extrémité C menons CDE parallèle à BA ; et d'un des points de rencontre D de la parallèle avec la circonférence, abaissons DG perpendiculaire sur AB. Nous aurons

$$AG \times GB = \overline{DG}^2, \quad \text{ou} \quad AG(p - AG) = b^2,$$

ou bien encore

$$BG(p - BG) = b^2.$$

Il résulte de là que les segments AG et BG du diamètre sont les racines de l'équation

$$x(p - x) = b^2.$$

Si $BC = \frac{1}{2} AB$, ou $b^2 = \frac{1}{4} p^2$ la ligne CDE devient tan-

gente, et les deux segments AG, BG sont égaux à $\frac{1}{2}p$. C'est le cas où les racines de l'équation sont égales. Lorsque BC surpasse $\frac{1}{2}$ AB, la ligne CDE cesse de rencontrer le cercle; cette circonstance répond au cas des racines imaginaires.

L'équation (2) revient à

$$x(x-p)=b^2.$$

Sous cette forme, on reconnaît la traduction algébrique de l'énoncé du problème suivant: *Construire un rectangle, connaissant la surface* b^2 *et la différence* p *des côtés adjacents.*

Sur $AB=p$ (*fig.* 10), comme diamètre, on décrira la circonférence OB. Au point B, on mènera la tangente $BC=b$, dont on joindra l'extrémité C au centre O, en prolongeant, toutefois, la ligne de jonction jusqu'à son intersection E avec la circonférence. On aura

$$CE\times CD=\overline{CB}^2,\quad \text{ou}\quad CE(CE-p)=b^2,$$

on aura aussi

$$-CD(-CD-p)=b^2.$$

Ce qui prouve que les racines de l'équation sont $+CE$ et $-CD$.

En changeant les signes des racines des équations (1) et (2) qui viennent d'être construites, on a évidemment celles des équations (3) et (4).

§ IV. — *Application de l'algèbre à quelques problèmes de géométrie.*

17. Reprenons le problème qui a pour objet d'inscrire un carré dans un triangle. En nommant x le côté du carré, et faisant (*fig.* 1)

$$BC=a,\quad AH=h,$$

on a trouvé (n° 2)

$$x = \frac{ah}{a+h}.$$

Le carré pouvant s'appuyer sur un quelconque des trois côtés du triangle, nous allons chercher dans quel cas ce carré inscrit est *maximum*. D'après la forme de la valeur de x, il est visible que quel que soit le côté du triangle, le numérateur de la valeur de l'inconnue représentera toujours le double de la surface du triangle, et le dénominateur, la somme de ce côté et de la hauteur correspondante. Le plus grand carré correspondra donc au cas où la somme dont il s'agit sera la plus petite.

Supposons BC plus petit que AC, ou $a < b$, en désignant par b le second côté AC; nommons h' la hauteur BH' correspondante à b. On aura

$$a + h < b + h'.$$

En effet, l'égalité $ah = bh'$ donne

$$a : b :: h' : h;$$

on en déduit

$$b - a : h - h' :: a : h'.$$

Mais a est plus grand que h'; donc

$$b - a > h - h', \quad \text{ou} \quad a + h < b + h'.$$

Le carré maximum s'appuiera donc sur le plus petit des trois côtés du triangle.

Remarque. — Si $a = b$, l'égalité $ah = bh'$ donne $h = h'$, par suite,

$$a + h = b + h';$$

et, dans ce cas, les carrés qui s'appuient sur les côtés a et b sont égaux entre eux.

Lorsque deux côtés a, b par exemple, forment un

angle droit, on a

$$h = b, \quad h' = a, \quad \text{d'où} \quad a + h = b + h';$$

il y a donc encore deux carrés égaux.

Mais les hypothèses que nous venons d'établir sont les seules dans lesquelles deux des carrés puissent être égaux entre eux. On voit effectivement que si aucune de ces hypothèses n'a lieu, on aura

$$a < b \quad \text{et} \quad a > h',$$

et, par conséquent, comme on l'a déjà démontré,

$$a + h < b + h'.$$

18. Problème.—*Inscrire dans un triangle* ABC (fig. 11), *un rectangle* GFED, *dont la surface soit égale à* m^2.

Soient $BC = a$, la hauteur $AH = h$, $DE = x$, $DG = y$; on aura

$$xy = m^2 \quad \text{et} \quad x : a :: h - y : h,$$

d'où

$$hx = ah - ay.$$

Éliminant x, il vient

$$(1) \qquad y^2 - hy + \frac{hm^2}{a} = 0,$$

équation qui donne

$$y = \frac{h}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{hm^2}{a}}.$$

Lorsque le radical est réel, les deux valeurs de y sont positives; leur somme est h, et leur produit, $\frac{hm^2}{a}$, représente un carré qui est au carré donné m^2, comme la hauteur h du triangle est à la base a.

Pour construire ces valeurs, on décrit sur la hauteur AH comme diamètre une demi-circonférence; on prend sur la base, à partir du point H, pied de la hauteur, une distance

HM égale au côté du carré $\frac{hm^2}{a}$; on élève ensuite au point M une perpendiculaire MP′P, rencontrant la circonférence aux points P, P′ : les longueurs MP, MP′ sont les valeurs de y.

En effet, si l'on mène les perpendiculaires PK, P′K′ sur AH, on aura

$$\mathrm{HK} \times \mathrm{KA} = \overline{\mathrm{KP}}^2 = \overline{\mathrm{HM}}^2 = \frac{hm^2}{a}.$$

D'ailleurs,

$$\mathrm{HK} + \mathrm{AK} = \mathrm{AH} = h.$$

Par conséquent, HK, AK sont les racines de l'équation (1). On voit facilement que HK′ = AK, et, par suite, que HK, HK′ sont les valeurs cherchées.

Il résulte de là qu'il existe deux rectangles DEFG, D′E′F′G′, qui répondent à la question.

19. *Remarque.* — La plus grande valeur de m^2 est celle pour laquelle on a

$$\frac{hm^2}{a} = \frac{h^2}{4}, \quad \text{ou} \quad m^2 = \frac{ah}{4};$$

c'est-à-dire que la surface du rectangle *maximum* est égale à la moitié de celle du triangle donné.

20. Problème. — *Couper une sphère* CM (fig. 12) *par un plan, de manière que le segment* AMB *soit équivalent au cône ayant même base que le segment, et pour sommet le centre de la sphère.*

En supposant que H soit le point du rayon CM par lequel le plan coupant doit être mené, désignons par x la distance CH, et par r le rayon de la sphère.

Puisque les deux volumes doivent être égaux, le cône sera la moitié du secteur CAMB.

Or, le volume du cône a pour expression

$$\tfrac{1}{3}\pi\,\overline{AH}^2\,x = \tfrac{1}{3}\pi\,(r^2 - x^2)\,x.$$

Celui du secteur est

$$\tfrac{2}{3}\pi r^2 \times MH = \tfrac{2}{3}\pi r^2 (r - x).$$

On aura donc l'équation

$$\tfrac{1}{3}\pi\,(r^2 - x^2)\,x = \tfrac{1}{3}\pi r^2 (r - x), \quad \text{ou} \quad (r + x)\,x = r^2.$$

Ce qui revient à

$$x^2 + rx - r^2 = 0,$$

ou bien encore à

$$x^2 = r(r - x).$$

Le point H sera donc déterminé en divisant le rayon de la sphère en moyenne et extrême raison.

21. Donnons, en terminant ce chapitre, les énoncés de quelques problèmes à résoudre.

I. *Connaissant la base d'un triangle, l'angle au sommet, et la somme des deux autres côtés, trouver chacun de ces côtés.*

II. *Sur une base donnée, construire un triangle dans lequel la somme des deux autres côtés soit double de la base, et dont le sommet soit sur une droite donnée de position.*

III. *Construire un triangle dont la base soit à la hauteur comme* p *est à* q, *et qui soit tel que l'aire du plus grand rectangle qu'on puisse y inscrire, égale* m^2.

IV. *Par un point donné sur le plan de deux droites indéfinies, mener une sécante telle que l'aire du triangle intercepté égale* m^2. (Discussion.)

V. *Étant donnés la hauteur d'un triangle, le rayon du cercle inscrit et le rayon du cercle circonscrit, trouver les trois côtés du triangle.*

VI. *Connaissant le périmètre d'un triangle, et les rayons des cercles inscrit et circonscrit, trouver les côtés. Quelles relations faut-il établir entre les données pour que le triangle soit équilatéral, pour qu'il soit isocèle, pour qu'il soit rectangle?*

VII. *Étant donnés les angles, la surface et le périmètre d'un trapèze, trouver les quatre côtés.*

VIII. *Étant données trois circonférences concentriques, trouver le côté du triangle équilatéral, dont les sommets seraient sur ces trois circonférences.*

IX. *Trouver un triangle semblable à un triangle donné, et dont les sommets reposent sur trois circonférences concentriques données.*

X. *Étant donné un cercle sur une sphère, trouver un second cercle parallèle au premier comprenant avec lui un segment qui soit dans le rapport* $\frac{p}{q}$ *avec le cône dont le sommet serait au centre du premier cercle, et qui aurait le second pour base. Examiner le cas où* $p = q$; *et celui où l'on a* $q = 3p$.

XI. *Un tronc de cône à bases parallèles étant donné, mener un plan, parallèle aux bases, qui divise ce tronc en deux parties ayant entre elles un rapport connu.*

XII. *Circonscrire à une sphère donnée un cône dont l'aire totale soit égale à celle d'un cercle donné. Dans quel cas cette aire sera-t-elle* minimum?

XIII. *Une sphère et un cylindre étant placés sur un même plan, couper ces deux corps par un second plan parallèle au premier, de manière que les solides compris entre ces plans parallèles soient entre eux dans un rapport donné.*

3.

XIV. *Construire sur un cercle donné un cône tel que le volume de la sphère inscrite soit la $n^{\text{ième}}$ partie du sien.* (Discussion. — *Dans quel cas le volume de la sphère sera-t-il* maximum?)

XV. *Inscrire dans une sphère un cylindre dont la surface convexe soit égale à* πm^2. *Déterminer la surface maximum.*

XVI. *Inscrire dans une sphère un cylindre dont la surface totale soit égale à* πm^2. *Trouver le maximum de la surface inscrite.*

XVII. *Trouver parmi tous les cylindres dont la surface totale est donnée, celui dont le volume est maximum.*

XVIII. *Inscrire dans un cône donné un cylindre dont la surface convexe soit égale à* πm^2. *Déterminer le maximum de la surface du cylindre inscrit.*

XIX. *Circonscrire à un cylindre donné un cône dont la surface convexe soit un minimum.*

XX. *Inscrire dans une sphère donnée un cône dont le volume soit un maximum.*

XXI. *Circonscrire à une sphère donnée un tronc de cône dont le volume soit* πm^3. *Déterminer le minimum de ce volume.*

XXII. *On donne la surface totale et le volume d'un cône, déterminer le rayon de sa base, et sa hauteur.*

(Discussion. — *Quel est, pour un volume donné, le minimum de la surface? et pour une surface donnée, le maximum du volume?*)

CHAPITRE DEUXIÈME.

DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES. — COMMENT ON LES REPRÉSENTE PAR DES ÉQUATIONS.

22. On a vu, en appliquant les propositions de la géométrie élémentaire, que lorsqu'on cherche un point d'après certaines conditions, ces conditions conviennent quelquefois à tous les points d'une même ligne qu'on nomme *lieu géométrique*. Alors, le problème est indéterminé. Appliquons l'algèbre à quelques questions de cette espèce.

Supposons, par exemple, qu'on ait à résoudre la question suivante :

Un point A *étant donné sur une droite indéfinie* AX (fig. 13), *trouver hors de cette droite un point* M *tel qu'en abaissant sur* AX *la perpendiculaire* MP, *cette perpendiculaire soit égale à la distance de son pied au point* A.

On reconnaît immédiatement que le problème est indéterminé; car, en prenant les distances arbitraires AP, AP′, AP″, etc., et en élevant les perpendiculaires PM, P′M′, P″M″, etc., respectivement égales aux distances AP, AP′, AP″, etc., les points M, M′, M″, etc., satisferont aux conditions de l'énoncé.

Si nous désignons par x l'une quelconque des distances AP, AP′, AP″, etc., et par y la perpendiculaire correspondante, nous aurons l'équation $y = x$, qui est indéterminée. Les points M, M′, M″, etc., appartiennent à une droite passant par le point A; car, en joignant ce dernier point à deux points quelconques M, M′, les triangles rectangles

APM, AP′M′ sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels; par suite, les angles MAP, M′AP′ sont égaux, et les trois points A, M, M′ sont en ligne droite.

L'équation $y = x$ caractérise la droite AMM′M″, etc.; c'est-à-dire qu'en donnant des valeurs arbitraires à x, et en prenant les valeurs correspondantes de y, on pourra trouver autant de points qu'on voudra de cette droite.

23. Prenons, pour second exemple, la question suivante :

Étant donnés deux points A, B (fig. 14); *trouver un troisième point* C, *tel que la somme des carrés de ses distances aux deux premiers soit égale au carré de la droite* AB.

On voit encore ici que le problème est indéterminé; car tous les points de la circonférence décrite sur AB comme diamètre répondent à l'énoncé.

Appliquons l'algèbre à la question dont il s'agit.

Abaissons du point C la perpendiculaire CP sur AB, et faisons

$$AP = x, \quad CP = y, \quad AB = 2a.$$

Les triangles rectangles APC, BPC donnent

$$\overline{AC}^2 = x^2 + y^2, \quad \overline{CB}^2 = (2a - x)^2 + y^2;$$

d'où

$$2y^2 + 2x^2 - 4ax + 4a^2 = 4a^2,$$

et, par suite,

$$(1) \qquad y^2 = 2ax - x^2.$$

Il est visible qu'on doit arriver à la même équation, quelle que soit la position du point C au-dessus ou au-dessous de AB. D'ailleurs, l'équation renfermant deux inconnues, on pourra donner à l'une d'elles, x par exemple, des valeurs arbitraires, qui feront connaître les valeurs corres-

pondantes de y. Comme on a

$$y = \pm\sqrt{x(2a - x)},$$

on voit que x ne peut recevoir de valeurs négatives, et qu'aucune valeur positive ne devra surpasser $2a$. En faisant varier x de o à $2a$, chaque valeur de cette inconnue donnera pour y deux valeurs égales et de signes contraires, que l'on portera en sens opposés à partir de la droite AB.

Nous ferons remarquer que le maximum du produit $x(2a - x)$ est a^2, et correspond à $x = a$. Alors, en faisant varier x de o à a, y croîtra de o à a, et pour les valeurs croissantes de x, de a à $2a$, y diminuera de a à o. Ce qui s'accorde avec la géométrie.

Il résulte de là que l'équation $y^2 = 2ax - x^2$ donnera tous les points de la circonférence, en faisant varier x de o à $2a$.

Ces deux exemples font entrevoir la possibilité de représenter des lignes par des équations. Nous verrons, par la suite, que toute ligne dont on connaît ou la définition, ou la génération, ou une propriété caractéristique, peut être représentée par une équation.

24. Dans la plupart des problèmes de géométrie, on a pour but de déterminer des points; c'est pourquoi nous allons d'abord faire connaître la manière de fixer analytiquement la position d'un point.

Pour déterminer la position d'un point sur une droite AX (*fig.* 15), on donne sa distance à un point fixe A de cette droite; on affecte cette distance du signe + ou du signe —, selon qu'elle est comptée du côté AX, ou du côté AX'.

D'après cette convention, si l'on désigne d'une manière générale par x cette distance prise avec le signe qui lui appartient, l'équation $x = +3$ conviendra à un point P situé sur AX à une distance de A, égale à 3 unités; et l'é-

quation $x = -3$ déterminera un point P′ placé sur AX′ à la même distance du point A.

25. Pour fixer la position d'un point sur un plan, on trace dans ce plan deux droites YAY′, XAX′ (*fig.* 16) qui font entre elles un angle connu. Un point M est déterminé lorsque l'on connaît les longueurs des parallèles MP, MQ, menées respectivement de ce point aux lignes fixes AY, AX. Ces longueurs MP, MQ sont égales aux distances AQ, AP. Quand elles seront connues, on les portera, à partir du point A, l'une sur YAY′, l'autre sur XAX′; et en menant, par les points Q, P, des parallèles QM, PM aux droites AX, AY, leur point de rencontre sera le point demandé.

Toutefois, pour que les points P, Q soient déterminés, il faut que l'on donne non-seulement leurs distances au point A, mais encore que l'on fasse connaître le sens dans lequel ces distances sont comptées. On est convenu de regarder comme positives les distances prises dans le sens AX et dans le sens AY; et comme négatives celles qui sont estimées en sens contraire.

Les distances telles que AP, ou son égale MQ, se nomment *abscisses;* et les distances telles que AQ ou MP, s'appellent *ordonnées*. On désigne généralement les abscisses par x, et les ordonnées par y. La ligne XX′, sur laquelle se comptent les abscisses, se nomme l'*axe* des abscisses ou des x. La droite YY′ est l'*axe* des ordonnées ou des y.

L'abscisse et l'ordonnée d'un point prises simultanément se nomment *coordonnées* de ce point.

Le point A où se coupent les deux axes, est l'*origine* des coordonnées.

Les abscisses et les ordonnées doivent être regardées comme des quantités variables susceptibles de recevoir toutes les valeurs possibles, positives ou négatives.

D'après les conventions précédentes, x et y sont positifs

dans l'angle YAX (*fig.* 16); x est négatif et y positif dans l'angle YAX'; x et y négatifs dans l'angle Y'AX'; et enfin, x est positif et y négatif dans l'angle Y'AX.

Quand on donnera les coordonnées particulières d'un point, on saura donc dans lequel des quatre angles formés par les axes, le point est situé.

Si l'on a, par exemple, $x = +2$, $y = -3$, on prendra dans le sens AX, la distance $AP = 2$, et dans le sens AY', la longueur $AQ' = 3$, et en menant par les points P et Q' des parallèles respectives aux axes, le point M', auquel elles se couperont, sera le point demandé.

Pour tout point de l'axe des x, l'ordonnée est égale à zéro; et pour tout point de l'axe des y, l'abscisse est aussi égale à zéro. Les coordonnées de l'origine sont donc toutes deux égales à zéro.

26. Cherchons maintenant l'expression de la distance de deux points M', M'' (*fig.* 17), en fonction de leurs coordonnées.

Soient x', y' les coordonnées du point M'; x'', y'', celles du point M'', et θ l'angle des axes. En menant par le point M'' une parallèle à l'axe des x, jusqu'à la rencontre de l'ordonnée du point M', on forme le triangle M''DM', dans lequel le côté M'' M' est la distance demandée.

Or, d'après un théorème connu, on a

$$\overline{M'M''}^2 = \overline{M''D}^2 + \overline{M'D}^2 - 2\,M''D.M'D.\cos.M'DM''.$$

Nommons D la droite M'M''; comme les côtés M''D et M'D ont pour valeurs respectives $(x'-x'')$, $(y'-y'')$, et que l'angle M'DM'' est le supplément de l'angle θ des axes, on aura

$$(1) \quad D^2 = (x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + 2(x'-x'')(y'-y'')\cos\theta.$$

Telle est la formule qui donne le carré de la distance de

deux points en fonction de leurs coordonnées, et par suite cette distance elle-même.

Cette formule a été obtenue en plaçant les deux points dans l'angle des coordonnées positives; mais il est facile de reconnaître qu'elle convient à toutes les positions des points dans les quatre angles formés par les axes, en ayant égard aux signes des coordonnées.

Lorsque l'angle des axes est droit, on a $\cos\theta = 0$, et la formule (1) devient

$$(2)\qquad D^2 = (x'-x'')^2 + (y'-y'')^2.$$

En effet, dans ce cas, la distance D est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dans lequel les côtés de l'angle droit sont les différences $(x'-x'')$ et $(y'-y'')$.

Si l'on veut avoir la distance d'un point à l'origine des coordonnées, on supposera qu'un des points donnés, M'' par exemple, se confond avec l'origine; on aura alors $x''=0$, $y''=0$, et les formules (1) et (2) deviendront

$$(3)\qquad D^2 = x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\theta,$$

$$(4)\qquad D^2 = x'^2 + y'^2.$$

27. Maintenant que nous savons déterminer la position d'un point, concevons qu'une ligne quelconque GH (*fig.* 18) soit tracée sur un plan, et que, dans ce plan, on ait mené deux axes XAX', YAY'. Il est aisé de voir que pour une abscisse quelconque AP, l'ordonnée PM sera déterminée, puisqu'il suffira pour l'obtenir de mener par le point P une parallèle à l'axe des y, jusqu'à la rencontre de la ligne GH. Ainsi, l'ordonnée et l'abscisse sont dépendantes l'une de l'autre, ou, comme on l'énonce ordinairement, l'une quelconque de ces deux quantités est fonction de l'autre. Quand cette fonction est constante, c'est-à-dire lorsque la relation entre l'abscisse et l'ordonnée ne change pas en passant d'un point à un autre de la ligne, l'équation qui exprime cette

relation est ce que **Descartes** a nommé l'*équation de cette ligne*. On entend donc par *équation d'une ligne*, l'expression de la relation constante qui existe entre les coordonnées de chacun de ses points.

Pour obtenir l'équation d'une ligne, il faut connaître la définition de cette ligne, ou, ce qui revient au même, l'une quelconque des propriétés qui la caractérisent, ou bien encore son mode de génération.

28. Non-seulement une ligne peut être représentée par une équation à deux variables, mais encore une équation $F(x, y) = 0$, entre deux variables, représente en général une ligne, lorsque les variables x, y sont considérées comme les coordonnées d'un point.

En effet, supposons qu'on ait résolu l'équation par rapport à l'une des deux inconnues, y par exemple, et qu'on ait trouvé différentes valeurs,

$$y = f(x), \quad y = f'(x), \quad y = f''(x), \ldots$$

Prenons la première, $y = f(x)$, et donnons à x différentes valeurs $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$, etc.; on en déduira pour y des valeurs correspondantes $6, 6', 6'', \ldots$, etc. Et, en prenant celles qui sont réelles, les différents systèmes

$$x = \alpha, \quad y = 6; \quad x = \alpha', \quad y = 6'; \ldots,$$

détermineront des points tels que M, M', M'', etc., (*fig.* 18), qui joints deux à deux, formeront une ligne brisée MM'M''M''', etc. Il est visible que si, au lieu d'assigner à x une suite de valeurs ayant entre elles une certaine différence, on imagine que x varie d'une manière continue, la ligne brisée deviendra une courbe dont les points auront pour coordonnées tous les systèmes de valeurs qui vérifient l'équation $y = f(x)$, en faisant croître x de $-\infty$ à $+\infty$. On en dirait autant des autres équations $y = f'(x)$, $y = f''(x)$, etc.

En opérant de cette manière, on obtient tous les systèmes de valeurs qui peuvent vérifier l'équation proposée

$$F(x, y) = 0.$$

Donc, une équation entre deux variables x, y représente une ligne qui est *le lieu géométrique* des points qui ont pour coordonnées tous les systèmes de valeurs qui peuvent satisfaire à cette équation.

Les lieux respectifs des équations partielles $y = f(x)$, $y = f'(x)$, etc., sont nommés les branches de la courbe représentée par l'équation $F(x, y) = 0$.

29. Faisons quelques applications des principes précédents.

Connaissant le centre et le rayon d'une circonférence de cercle, proposons-nous de trouver l'équation de cette ligne.

Soient α, β, l'abscisse et l'ordonnée du centre C (*fig.* 19), et r le rayon. Si nous désignons par x et y les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe, nous aurons (n° 26)

$$\overline{CM}^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta,$$

θ étant l'angle des axes.

Remplaçant CM par r, on aura

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta = r^2,$$

équation qui n'est autre chose que la traduction analytique de la définition de la circonférence.

30. Cherchons maintenant *le lieu de l'équation* $y^2 = 2x$, ou construisons la ligne que cette équation représente.

En résolvant l'équation par rapport à y, on a les deux valeurs $y = \sqrt{2x}$, $y = -\sqrt{2x}$, ou simplement $y = \pm\sqrt{2x}$.

Il est évident que y est imaginaire pour toutes les valeurs négatives de x; on ne doit donc attribuer à cette dernière variable que des valeurs positives. En supposant d'abord

$x = 0$, on a $y = 0$, ce qui fait voir que l'origine des coordonnées est un des points demandés. Pour toute valeur positive de x, on obtient pour y deux valeurs égales et de signes contraires, d'où il suit que les points du lieu de l'équation sont deux à deux à égale distance de l'axe des x. On voit facilement que x augmentant, y augmente aussi, et que ces deux quantités peuvent croître jusqu'à l'infini; c'est-à-dire que les points successifs de la ligne représentée par l'équation donnée s'éloignent de plus en plus de l'axe des x, et que cet éloignement n'a pas de limite.

On comprend sans peine qu'il n'est pas rigoureusement possible d'obtenir toutes les solutions de l'équation proposée, car on ne peut attribuer à x que des valeurs discontinues. Mais on peut toujours, en donnant à cette variable des valeurs très-peu différentes les unes des autres, avoir des points de la ligne aussi rapprochés et en tel nombre que l'on voudra. On joindra ensuite ces points par un trait continu, et l'on aura une ligne qui différera d'autant moins de celle que représente l'équation, que les points qu'on aura déterminés directement seront plus nombreux.

On trouvera de cette manière que le lieu de l'équation $y^2 = 2x$ a la forme indiquée par la *fig.* 20.

CHAPITRE TROISIÈME.

CLASSIFICATION DES LIGNES.

31. Les lignes, comme on l'a déjà vu, peuvent être représentées par des équations qui ne sont autre chose que l'expression d'une relation constante entre les coordonnées de chacun de leurs points. Or, ces équations pouvant être algébriques ou transcendantes, on a distingué les lignes en *lignes algébriques* et en *lignes transcendantes,* suivant que leurs équations sont de la première espèce ou de la seconde (*). Nous nous occuperons principalement des lignes algébriques.

Ces lignes sont classées en différents ordres d'après le degré de leurs équations. Ainsi, les lignes du premier ordre sont celles dont l'équation est du premier degré; les lignes du second ordre sont celles dont l'équation est du second degré; et ainsi de suite.

Nous devons faire observer que cette classification suppose que le degré de l'équation d'une ligne est, comme on le verra plus loin, *indépendant du système d'axes coordonnés* auquel on la rapporte. Il est encore important de remarquer qu'une équation à deux indéterminées ne représente pas toujours une courbe de l'ordre exprimé par le degré de l'équation; mais qu'elle peut représenter un système de lignes d'un ordre inférieur. En effet, soit

$$F(x, y) = 0$$

(*) Nous ne considérons ici que des coordonnées rectilignes; par la suite, nous emploierons un autre système de coordonnées.

cette équation. En supposant que le premier membre soit décomposable en facteurs rationnels $f(x, y)$, $f'(x, y)$, $f''(x, y)$, etc., il est visible que les solutions de l'équation

$$F(x, y) = 0$$

sont celles des équations

$$f(x, y) = 0, \quad f'(x, y) = 0, \quad f''(x, y) = 0, \ldots;$$

et comme chacune de ces dernières représente, en général, une ligne, il en résulte que le lieu de l'équation proposée est le système de ces lignes. Ainsi, l'équation

$$(y + ax + b)(y^2 - cx)(y^3 - dx^2 + ex + f) = 0$$

représente un système de trois lignes : l'une du premier ordre, l'autre du deuxième ordre, et la dernière du troisième ordre. Il est bien entendu que les facteurs du deuxième et du troisième degré sont supposés indécomposables.

32. On ne se borne pas à distinguer les lignes algébriques en divers ordres ; on cherche encore les différents genres qu'un même ordre peut renfermer, et, s'il y a lieu, les différentes espèces de chaque genre.

Ces lignes sont alors *classées* d'après certains caractères qui les distinguent complétement les unes des autres. Enfin on détermine la forme et les propriétés de chacune d'elles. C'est ce que nous ferons pour les deux premiers degrés. Nous reconnaîtrons que dans le premier degré il n'y a que des lignes droites, et que le second renferme trois genres de courbes bien distinctes. On a trouvé pour le troisième degré soixante-dix-huit espèces de courbes.

CHAPITRE QUATRIÈME.

LIGNES DU PREMIER ORDRE.

Construction des équations du premier degré.

33. L'équation du premier degré peut être ramenée à la forme $Ay + Bx = C$. Si nous supposons $C = 0$, et si nous résolvons l'équation par rapport à y, nous aurons $y = ax$, le coefficient a de x pouvant être positif ou négatif.

Prenons d'abord a positif. En donnant à x des valeurs positives, on a pour y des valeurs positives; et en attribuant à x des valeurs négatives, on obtient des valeurs de la même espèce pour y. D'où il résulte que les points dont les coordonnées vérifient la relation $y = ax$ sont situés dans l'angle YAX (*fig.* 21) et dans son opposé au sommet Y'AX'.

Cette équation donne $\frac{y}{x} = a$; c'est-à-dire que, pour les points qu'elle détermine, le rapport de l'ordonnée à l'abscisse a une valeur constante a; par conséquent, si M, M' sont deux de ces points, et qu'on mène les ordonnées MP, M'P', les triangles AMP, AM'P' seront semblables, comme ayant un angle égal compris entre des côtés proportionnels. Donc les angles MAP, M'AP' seront égaux; par suite, les points M, M' sont en ligne droite avec l'origine. Il en serait de même de tous les points qu'on déterminerait par l'équation $y = ax$.

On conclut de là que l'équation $y = ax$ a pour lieu géométrique une ligne droite HH' (*fig.* 21) qui passe par l'origine des coordonnées et par l'un des points M que détermine l'équation $y = ax$.

Réciproquement, si l'on prend un point quelconque M' sur la droite HH', les coordonnées de ce point satisferont à la relation $y = ax$.

En effet, en menant les ordonnées MP, M'P', les triangles semblables AMP, AM'P' donneront

$$\frac{M'P'}{AP'} = \frac{MP}{AP}.$$

Mais

$$\frac{MP}{AP} = a, \quad \text{donc} \quad \frac{M'P'}{AP'} = a;$$

et, en désignant généralement par x et y les coordonnées du point M', on arrive à l'équation $y = ax$.

Lorsque a est négatif, en mettant le signe — en évidence, on a

$$y = -ax;$$

dans ce cas, les valeurs positives de x fournissent des valeurs négatives pour y, et les valeurs négatives de x conduisent à des valeurs positives pour y. En raisonnant comme précédemment, on trouvera une droite dans la situation HAH' (*fig.* 22). On conclut de là que, quel que soit a, l'équation $y = ax$ représente une ligne droite passant par l'origine des coordonnées.

Pour construire cette ligne, on fait $x = 1$, ce qui donne $y = a$; à partir de l'origine, on prend sur l'axe des x une longueur AP égale à l'unité; par le point P on mène à l'axe des y une parallèle indéfinie PM (*fig.* 21 et 22) sur laquelle on prend une longueur PM égale a, au-dessus ou au-dessous de l'axe des x, suivant que a est positif ou négatif, et l'on joint le point M à l'origine des coordonnées.

34. Prenons maintenant l'équation complète

$$Ay + Bx = C;$$

en la résolvant par rapport à y, on a

$$y = ax + b,$$

en nommant a, b, les rapports $-\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$.

Relativement aux signes dont a, b peuvent être affectés, il y a quatre cas à considérer.

1°. Soient a et b positifs.

En attribuant à x les mêmes valeurs dans les équations

$$y = ax, \quad y = ax + b,$$

les valeurs de y fournies par la seconde seront égales aux valeurs de y données par la première, augmentées de la quantité constante b. Or, $y = ax$ est l'équation d'une droite FF′ (*fig.* 23) passant par l'origine; donc $y = ax + b$ représente une droite D′D parallèle à la première, et menée par un point B de l'axe des y, à une distance b de l'origine.

Pour que cette conclusion ne laisse aucun doute, nous allons faire voir qu'en prenant un point quelconque sur la droite DD′ dans chacun des angles qu'elle traverse, les coordonnées de ce point satisferont à la relation

$$y = ax + b.$$

Prenons le point M dans l'angle YAX. L'ordonnée PM égale PN + NM. Or

$$PN = a \times AP, \quad MN = b;$$

donc

$$PM = a \times AP + b.$$

Considérons le point M′ situé dans l'angle YAX′. On a pour ce point

$$P'M' = M'N' - P'N'.$$

La valeur absolue de

$$P'N' = a \times AP', \quad M'N' = b,$$

d'où l'on déduit

$$P'M' = b - a \times AP' = a \times - AP' + b.$$

Comme $-AP'$ est l'abscisse du point M', on voit que les coordonnées de ce dernier point vérifient la relation

$$y = ax + b.$$

Enfin, soit M″ un point pris dans l'angle Y'AX'; on aura

$$P''M'' = P''N'' - M''N''.$$

La valeur absolue de $P''N''$ est $a \times AP''$, celle de $M''N''$ est b. On a alors

$$P''M'' = a \times AP'' - b;$$

l'ordonnée du point M″ est $-P''M''$, d'où il résulte qu'on a

$$-P''M'' = a \times - AP'' + b, \quad \text{ou} \quad y = ax + b.$$

2°. Si l'on a l'équation

$$y = ax - b,$$

on trouvera, en raisonnant comme précédemment, qu'elle représente la droite D'D (*fig.* 24).

3°. Lorsque l'équation est

$$y = -ax + b,$$

cette équation a pour lieu géométrique la droite DD' (*fig.* 25).

4°. Enfin, si l'on a l'équation

$$y = -ax - b,$$

on trouve facilement qu'elle représente la droite DD' (*fig.* 26).

35. Si dans l'équation complète

$$Ay + Bx = C$$

on suppose $A = 0$, on a

$$Bx = C, \quad \text{ou} \quad x = \frac{C}{B}.$$

On voit sans peine que cette dernière équation représente une parallèle à l'axe des y, située à droite ou à gauche de cet axe, selon que $\frac{C}{B}$ est positif ou négatif, et qui rencontre l'axe des x à une distance $\frac{C}{B}$ de l'origine.

Si $B = 0$, l'équation se réduit à $y = \frac{C}{A}$, qui représente évidemment une parallèle à l'axe des x, au-dessus ou au-dessous de cet axe.

Il résulte de ce qui précède, que toujours l'équation du premier degré a pour lieu géométrique une ligne droite.

36. D'après ce qui vient d'être exposé, pour construire une équation du premier degré, il faudrait la ramener à la forme $y = ax + b$, déterminer la droite $y = ax$, et mener une parallèle à cette dernière droite, par un point pris sur l'axe des y, à une distance de l'origine égale à b, au-dessus ou au-dessous de l'axe des x. Mais on construit plus facilement l'équation en cherchant les points de rencontre de la droite avec les axes des coordonnées ; ce qui se fait en supposant successivement $x = 0$, $y = 0$, dans l'équation donnée.

Soit, par exemple, l'équation

$$4y - 2x = 5;$$

l'hypothèse $x = 0$ donne $y = \frac{5}{4}$, et la supposition $y = 0$ conduit à $x = -\frac{5}{2}$. En prenant (*fig.* 27)

$$AB = \frac{5}{4}, \quad AC = \frac{5}{2},$$

et en joignant les points C, B par une droite indéfinie, on aura la ligne représentée par l'équation

$$4y - 2x = 5.$$

37. Après avoir démontré que toute équation du premier degré a pour lieu géométrique une droite, nous devons faire voir qu'une ligne droite, quelle que soit sa position, est représentée par une équation du premier degré.

Soit d'abord la droite HAH′ (*fig.* 21) passant par l'origine. Si l'on prend sur cette ligne deux points quelconques M, M′, et si par ces points on mène les parallèles MP, M′P′ à l'axe des y, les triangles semblables M′P′A, MPA donneront $\frac{M'P'}{AP'} = \frac{MP}{AP}$. On voit par là que le rapport de l'ordonnée à l'abscisse a une valeur constante; en désignant cette valeur par a, et en représentant généralement par y et x les coordonnées, on obtient

$$\frac{y}{x} = a, \quad \text{ou} \quad y = ax.$$

Soit maintenant la droite DCD′ rencontrant l'axe des y en un point quelconque B (*fig.* 23).

Menons par l'origine la parallèle FF′ à DD′, et considérons l'ordonnée PM d'un point quelconque de cette dernière ligne. L'ordonnée coupera la parallèle FF′ en un point N. Le rapport $\frac{PN}{PA}$ a une valeur constante a. Or

$$PN = PM - MN = PM - AB.$$

En posant

$$PM = y, \quad AP = x, \quad AB = b,$$

on obtient

$$\frac{y - b}{x} = a, \quad \text{ou} \quad y = ax + b.$$

Lorsque la droite considérée est parallèle à l'un des axes,

à l'axe des y par exemple, en supposant que cette ligne soit DD′ (*fig.* 28), tous les points de cette ligne ont une abscisse égale à AC. D'où il résulte que AC étant désignée par c, l'équation de la ligne DD′ est $x = c$.

On trouverait $y = c'$ pour l'équation d'une parallèle à l'axe des x. Par conséquent, toute droite, quelle que soit sa position, est représentée par une équation du premier degré.

Problèmes sur la ligne droite.

38. Nous venons de voir que l'équation d'une droite est généralement de la forme $y = ax + b$. Quand on dit qu'une droite est donnée, on entend que les quantités a, b sont connues; et quand on se propose de déterminer une droite, on a pour but de trouver ces mêmes quantités. L'analyse est d'accord avec la géométrie, qui apprend que deux conditions sont nécessaires et suffisantes pour fixer la position d'une droite.

Nous allons résoudre divers problèmes dans quelques-uns desquels nous aurons à calculer a et b.

39. Problème I. — *Connaissant l'angle* DCX $= \alpha$, *qu'une droite* DD′ (fig. 23) *forme avec l'axe des* x, *et l'ordonnée* AB $= b$ *à l'origine, trouver l'équation de cette droite.*

L'équation de la droite est de la forme $y = ax + b$, et l'inconnue est a.

Pour trouver la valeur de a, menons par l'origine la droite FF′ parallèle à DD′; l'équation de cette parallèle est

$$y = ax.$$

Si NP est l'ordonnée d'un point quelconque de cette dernière ligne, on aura

$$\frac{\text{NP}}{\text{AP}} = a.$$

Le triangle NAP donne

$$\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{AP}} = \frac{\sin \mathrm{NAP}}{\sin \mathrm{ANP}}.$$

Si l'on désigne par θ l'angle YAX des axes, on aura

$$\mathrm{ANP} = \theta - \alpha,$$

et, par suite,

$$a = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)}.$$

L'équation demandée est donc

$$y = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)} x + b.$$

Quoique nous ayons implicitement supposé $\alpha < \theta$, l'équation que nous venons de trouver convient encore au cas où l'on a $\alpha > \theta$ (*fig.* 25).

En prenant encore un point N sur FF', et en menant l'ordonnée NP, on aura

$$\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{AP}} = \frac{\sin \mathrm{NAP}}{\sin \mathrm{ANP}} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \theta)}.$$

Or, l'abscisse du point N est $-\mathrm{AP}$; on a donc

$$a = \frac{\mathrm{NP}}{-\mathrm{AP}},$$

ce qui conduit à

$$a = -\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \theta)} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)}.$$

D'où il résulte que l'équation

$$y = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)} x + b$$

convient encore à la droite DD'.

Nous devons faire remarquer : 1°. que l'angle θ des axes est celui qui est formé par les parties AX, AY de ces lignes

sur lesquelles sont comptées les coordonnées positives; 2°. que l'angle α est l'angle DCX formé du côté des abscisses positives par la partie de la droite située au-dessus de l'axe des x; 3°. que l'ordonnée à l'origine b peut être positive ou négative.

Quand l'angle $\theta = 90°$, comme $\sin(\theta - \alpha) = \cos\alpha$,

$$a = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \text{tang}\,\alpha.$$

Ainsi, quand les axes sont obliques, a est un rapport de sinus, et lorsque les axes sont rectangulaires, a représente la tangente trigonométrique de l'angle que la droite fait avec l'axe des x.

40. Problème II. — *Connaissant l'équation* $y = ax + b$ *d'une droite, déterminer l'angle qu'elle forme avec l'axe des* x.

Nous venons de voir que $a = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)}$, θ étant l'angle des axes, et α l'angle demandé.

De cette équation on tire

$$a.\sin(\theta - \alpha) = \sin\alpha,$$

ou

$$a(\sin\theta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta) = \sin\alpha.$$

Divisant les deux membres par $\cos\alpha$, il vient

$$a(\sin\theta - \text{tang}\,\alpha\cos\theta) = \text{tang}\,\alpha,$$

et, par suite,

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{a\sin\theta}{1 + a\cos\theta},$$

formule que l'on peut facilement rendre calculable par logarithmes.

41. Problème III. — *Trouver l'équation d'une droite qui passe par deux points donnés.*

Soient x', y'; x'', y'', les coordonnées des points donnés

M′, M″. En supposant que la droite rencontre l'axe des y, son équation sera de la forme $y = ax + b$; les inconnues étant a et b. Pour les obtenir, nous ferons remarquer que la droite devant passer par les points donnés, les coordonnées de ces points doivent satisfaire à la relation $y = ax + b$, ce qui conduit aux deux équations

$$y' = ax' + b, \quad y'' = ax'' + b.$$

On pourrait, au moyen de ces équations, trouver facilement les valeurs de a et de b, qu'on porterait ensuite dans la relation $y = ax + b$. Mais le calcul suivant est un peu plus simple; en retranchant membre à membre les équations $y = ax + b$, $y' = ax' + b$, ce qui revient à éliminer l'inconnue b entre ces équations, on a

$$y - y' = a(x - x').$$

Pour obtenir a on retranche aussi, membre à membre, les équations $y' = ax' + b$, $y'' = ax'' + b$, ce qui conduit à

$$y' - y'' = a(x' - x''), \quad \text{d'où} \quad a = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

Portant cette valeur de a dans l'équation $y - y' = a(x - x')$, il vient

$$(1) \qquad y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'),$$

équation de la droite qui passe par les deux points donnés.

On peut s'assurer de l'exactitude de l'équation (1) en prouvant qu'elle est vérifiée par les coordonnées des points M′, M″.

En effet, si l'on remplace x et y par x', y', on aura

$$(y' - y') = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x' - x'), \quad \text{ou} \quad 0 = 0.$$

En remplacant x, y par x'', y'', il vient

$$(y'' - y') = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x'' - x'), \quad \text{ou} \quad \frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

Il est très-important de faire remarquer que l'équation $y-y'=a(x-x')$ représente toutes les droites qui passent par le point dont les coordonnées sont x' et y'.

Si l'on a

$$y'=y'' \quad \text{et} \quad x' < \text{ ou } > x'',$$

l'équation (1) devient

$$y-y'=0, \quad \text{ou} \quad y=y'.$$

En effet, dans ce cas la droite M' M'' doit être parallèle à l'axe des x. En faisant $x'=x''$, y' étant différent de y'', l'équation prend la forme

$$y-y'=\infty \times (x-x').$$

Mais on évite ce résultat en multipliant d'abord par $x'-x''$ les deux membres de l'équation (1); elle devient alors

$$(y-y')(x'-x'')=(y'-y'')(x-x'),$$

ce qui conduit, dans l'hypothèse établie, à

$$(y'-y'')(x-x')=0,$$

et comme $y'-y''$ n'est pas nul, on a

$$x-x'=0, \quad \text{ou} \quad x=x',$$

équation d'une parallèle à l'axe des ordonnées.

En supposant à la fois $y'=y''$, $x'=x''$, on trouve

$$y-y'=\frac{0}{0}(x-x').$$

Effectivement, la position de la droite doit être indéterminée, puisque cette ligne n'est assujettie qu'à passer par un point.

42. Problème IV. — *Trouver l'équation d'une droite qui passe par un point donné et qui soit parallèle à une droite donnée.*

Soient $y=ax+b$ l'équation de la droite donnée, et

x', y' les coordonnées du point par lequel doit passer la parallèle; cette dernière ligne aura une équation de la forme $y = a'x + b'$, les inconnues étant a', b'.

En désignant par α l'angle que la première droite fait avec l'axe des x, et en représentant, pour un moment, par α' l'angle de la seconde droite avec ce même axe, on aura (*problème* I)

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)}, \quad a' = \frac{\sin\alpha'}{\sin(\theta - \alpha')},$$

θ étant l'angle des axes.

Or, les droites étant parallèles, $\alpha' = \alpha$, et par suite $a' = a$. Cette condition est suffisante, car (*problème* II) on a

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a\sin\theta}{1 + a\cos\theta} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\alpha' = \frac{a'\sin\theta}{1 + a'\cos\theta},$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\alpha',$$

quand $a = a'$.

Si l'on remplace a' par a dans l'équation $y = a'x + b'$, elle devient

$$y = ax + b';$$

comme b' reste indéterminée, cette dernière équation représente toutes les parallèles, en nombre infini, à la droite donnée.

La seconde droite devant passer par le point qui a pour coordonnées x', y', on a la relation $y' = ax' + b'$; retranchant membre à membre, pour éliminer b', les deux équations

$$y = ax + b', \quad y' = ax' + b',$$

on a

$$y - y' = a(x - x'),$$

qui est l'équation demandée.

43. Problème V. — *Déterminer le point d'intersection de deux droites dont on a les équations.*

Soient

$$y = ax + b, \tag{1}$$

$$y = a'x + b' \tag{2}$$

les équations données. Les coordonnées du point de rencontre des deux droites devant satisfaire aux équations (1) et (2), nous allons résoudre ces deux équations. En les retranchant membre à membre, on obtient

$$0 = x(a - a') + b - b', \quad \text{d'où} \quad x = \frac{b' - b}{a - a'};$$

cette valeur portée dans une des équations, dans (1) par exemple, donne

$$y = \frac{ab' - ba'}{a - a'}.$$

Lorsque $a = a'$, b étant différent de b', les valeurs des coordonnées x et y, du point de rencontre, deviennent infinies; il en doit être ainsi, puisqu'alors les droites sont parallèles.

Si l'on suppose à la fois $a = a'$, $b = b'$, on a

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0};$$

valeurs indéterminées. En effet, dans ce cas, les équations des deux droites étant les mêmes, ces deux droites se confondent, c'est-à-dire que tous les points de l'une d'elles appartiennent à l'autre.

44. Problème VI. — *Étant données les équations de deux droites, trouver l'angle de ces droites.*

Soient $y = ax + b$, $y = a'x + b'$, les équations des droites données CD, C'D' (*fig.* 29) que nous supposons d'abord rapportées à des axes rectangulaires.

Nommons ν l'angle CMC′ des deux droites; α, α', les angles que ces mêmes droites font avec l'axe des x; nous aurons

$$\nu = \alpha' - \alpha, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang} \nu = \operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{\operatorname{tang} \alpha' - \operatorname{tang} \alpha}{1 + \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \alpha'}.$$

Or,

$$\operatorname{tang} \alpha = a, \quad \operatorname{tang} \alpha' = a';$$

donc,

$$\operatorname{tang} \nu = \frac{a' - a}{1 + aa'},$$

formule qui donne la tangente de l'angle demandé.

Nous devons faire observer que les deux droites CD, C′D′ forment deux angles CMC′, DMC′ différents, mais supplémentaires, et qu'alors leurs tangentes doivent être les mêmes au signe près; il résulte de là que la valeur obtenue précédemment, étant prise en signe contraire, conviendra à l'angle C′MD.

Quand les deux droites sont parallèles, $\nu = 0$, et, par suite,

$$\frac{a' - a}{1 + aa'} = 0;$$

on en peut conclure $a = a'$.

Supposons d'abord qu'aucune des quantités a, a' ne soit infinie; on devra avoir $a' - a = 0$, et $1 + aa'$ différent de zéro. Or cette seconde condition est une conséquence de la première, puisque $1 + aa'$ devient $1 + a^2$.

Si l'une des quantités a, a' est infinie, a' par exemple, en divisant par a' les deux termes de la valeur de tang ν, on aura

$$\frac{1 - \dfrac{a}{a'}}{\dfrac{1}{a'} + a} = 0,$$

ou, parce que a' est infini, $\frac{1}{a} = 0$, ce qui exige que a soit aussi infini; on a donc encore $a = a'$.

Lorsque les deux droites sont perpendiculaires, la valeur de tang ν doit être infinie, ce qui entraîne la condition

$$1 + aa' = 0.$$

Car, si a et a' ont des valeurs finies, il faudra qu'on ait $1 + aa' = 0$, sans que $a' - a$ soit nul; et cette dernière condition est, comme on l'a déjà vu, une conséquence de la première.

Si l'une des quantités a', a est infinie, a' par exemple, on divisera les deux termes de la valeur de tang ν par a', ce qui donnera

$$\frac{1 - \frac{a}{a'}}{\frac{1}{a'} + a} = \infty,$$

ou, parce que a' est infini, $\frac{1}{a} = \infty$, ce qui exige que $a = 0$. Ces valeurs de a et de a' vérifient la relation $1 + aa' = 0$, en l'écrivant sous la forme $\frac{1}{a'} + a = 0$.

45. Considérons le cas où les axes font entre eux un angle quelconque θ, et représentons toujours les droites CD, C'D' (*fig.* 30) par les équations

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b'.$$

ν étant l'angle des droites, et α, α' les angles de ces droites avec l'axe des x, on aura encore

$$\nu = \alpha' - \alpha, \quad \text{tang}\,\nu = \text{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{\text{tang}\,\alpha' - \text{tang}\,\alpha}{1 + \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha'}.$$

Or (*problème* II),

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{a \sin\theta}{1 + a\cos\theta}, \quad \text{tang}\,a' = \frac{a'\sin\theta}{1 + a'\cos\theta};$$

substituant ces valeurs de tang α, tang α' dans

$$\operatorname{tang} v = \frac{\operatorname{tang}\alpha' - \operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha'},$$

on trouve, après avoir multiplié les deux termes de la fraction par le produit $(1 + a\cos\theta)(1 + a'\cos\theta)$,

$$(1) \qquad \operatorname{tang} v = \frac{(a' - a)\sin\theta}{1 + aa' + (a + a')\cos\theta}.$$

On peut encore démontrer ici que dans le cas où les droites sont parallèles, on a $a = a'$, et que quand elles sont perpendiculaires, on doit toujours avoir

$$1 + aa' + (a + a')\cos\theta = 0.$$

La condition de parallélisme sera remplie lorsque $a' - a$ sera nul, le dénominateur étant différent de zéro; ou bien lorsque le dénominateur sera infini, le numérateur ayant une valeur finie.

La condition $a' - a = 0$, ou $a' = a$, donne pour dénominateur

$$1 + a^2 + 2a\cos\theta,$$

qui ne peut être nul, car

$$1 + a^2 + 2a\cos\theta = (a + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta.$$

Pour que le dénominateur soit infini, il faut que l'une des quantités a ou a' soit elle-même infinie, a' par exemple. Divisant par a' les deux termes de la valeur de tang v, il vient

$$\operatorname{tang} v = \frac{\left(1 - \frac{a}{a'}\right)\sin\theta}{\frac{1}{a'} + a + \left(\frac{a}{a'} + 1\right)\cos\theta};$$

ou, parce que $a' = \infty$,

$$\operatorname{tang} v = \frac{\sin\theta}{a + \cos\theta}.$$

Pour que cette tangente soit nulle, il faut que $a = \infty$. On a donc encore $a = a'$. On conclut de là que pour que deux droites soient parallèles, il faut et il suffit que leurs coefficients angulaires a, a' soient égaux.

Lorsque les deux droites sont perpendiculaires, on doit avoir

$$\operatorname{tang} v = \infty .$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que le dénominateur soit nul, sans que le numérateur le soit; ou que le numérateur soit infini, le dénominateur ayant une valeur finie.

Dans le premier cas,

$$(1) \qquad 1 + aa' + (a + a')\cos\theta = 0,$$

et l'on sait qu'alors le numérateur ne peut être nul.

Dans le second, l'une des quantités a ou a' doit être infinie; supposons que ce soit a'. En divisant par a' les deux termes de la valeur de tang v, on a

$$\operatorname{tang} = \frac{\left(1 - \frac{a}{a'}\right)\sin\theta}{\frac{1}{a'} + a + \left(\frac{a}{a'} + 1\right)\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{a + \cos\theta},$$

quand $a' = \infty$. La condition $a' = \infty$ ne suffit pas pour rendre infinie la valeur de tangente v; il faut encore que l'on ait $a = -\cos\theta$. Mais ces valeurs de a' et de a vérifient l'équation

$$1 + aa' + (a + a')\cos\theta = 0,$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{1}{a'} + a + \left(\frac{a}{a'} + 1\right)\cos\theta = 0,$$

puisqu'on a $a + \cos\theta = 0$.

Ainsi, l'équation (1) exprime, dans tous les cas, la condition nécessaire et suffisante pour que les droites repré-

sentées par les équations

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b',$$

soient perpendiculaires.

46. Problème VII. — *Mener par un point donné une perpendiculaire à une droite aussi donnée, et trouver la longueur de la perpendiculaire.*

Supposons d'abord les axes rectangulaires. Soient x', y' les coordonnées du point donné P, et $y = ax + b$ l'équation de la droite CD (*fig.* 29). La ligne demandée devant passer par le point P, son équation sera de la forme

$$y - y' = a'(x - x').$$

Or, les deux droites étant perpendiculaires, on a

$$1 + aa' = 0, \quad \text{d'où} \quad a' = -\frac{1}{a}.$$

L'équation de la perpendiculaire, PM, sera donc

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x').$$

Les coordonnées du point M sont les valeurs de x et de y, qui satisfont en même temps aux équations des deux droites; mais, d'après l'expression générale

$$\delta = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

de la distance de deux points dans le cas où les axes sont rectangulaires, il suffit de calculer les différences $x - x'$, $y - y'$. Pour les obtenir, nous mettrons l'équation

$$y = ax + b$$

sous la forme

$$y - y' = a(x - x') - y' + ax' + b.$$

Cette équation, combinée avec celle de la seconde droite

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x'),$$

donne

$$x - x' = \frac{a(y' - ax' - b)}{a^2 + 1}, \quad y - y' = -\frac{y' - ax' - b}{a^2 + 1}.$$

Substituant, il vient

$$\delta = \sqrt{\frac{(y' - ax' - b)^2 (a^2 + 1)}{(a^2 + 1)^2}} = \pm \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

Telle est l'expression de la perpendiculaire PM.

La valeur de δ devant être positive, on prendra le signe supérieur quand le numérateur $y' - ax' - b$ sera positif, le signe inférieur quand le numérateur sera négatif.

En faisant en même temps

$$x' = 0, \quad y' = 0,$$

on aura pour la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite $y = ax + b$,

$$\delta = \pm \frac{b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Lorsque le point donné est sur la droite, on a

$$y' - ax' - b = 0, \quad \text{d'où} \quad \delta = 0.$$

Ce qui doit être nécessairement.

Remarque. — En appliquant la géométrie à la question précédente, on obtient, après avoir abaissé la perpendiculaire PGH (*fig.* 29) sur l'axe des x,

$$\text{PM} = \text{PG} . \sin \text{MGP} = \text{PG} . \cos \text{DCX}.$$

Or,

$$\text{PG} = \text{PH} - \text{GH} = y' - ax' - b,$$

$$\cos \text{DCX} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \text{DCX}}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation

$$PM = PG . \cos DCX,$$

on trouve

$$\delta = \pm \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

47. Considérons maintenant le cas où les axes font un angle quelconque θ. En désignant, comme précédemment, les coordonnées du point donné (*fig.* 30) par x', y', et l'équation de la droite par

$$(1) \qquad y = ax + b,$$

on aura d'abord

$$y - y' = a'(x - x'), \quad 1 + aa' + (a + a')\cos\theta = 0;$$

d'où

$$a' = -\frac{1 + a\cos\theta}{a + \cos\theta};$$

et l'équation de la perpendiculaire sera

$$(2) \qquad y - y' = -\frac{1 + a\cos\theta}{a + \cos\theta}(x - x').$$

Pour trouver la longueur de cette droite, nous prendrons la formule

$$(3) \quad \delta = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + 2(x - x')(y - y')\cos\theta}.$$

En mettant l'équation (1) sous la forme

$$y - y' = a(x - x') - y' + ax' + b,$$

et la combinant avec l'équation (2), on obtient

$$x - x' = \frac{(a + \cos\theta)(y' - ax' - b)}{1 + a^2 + 2a\cos\theta},$$

$$y - y' = -\frac{(1 + a\cos\theta)(y' - ax' - b)}{1 + a^2 + 2a\cos\theta}.$$

Portant ces valeurs dans la formule (3), on trouve

$$(1) \qquad \delta = \pm \frac{(y' - ax' - b)\sin\theta}{\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\theta}}.$$

On peut obtenir cette valeur de δ d'une manière plus simple. Par le point B (*fig.* 30), on mène BO parallèle à l'axe des x; on prend sur cet axe une longueur AI égale à l'unité, et l'on conduit IK parallèle à l'axe des y, jusqu'à la rencontre de la droite donnée. On a alors

$$OK = a.$$

Le triangle MPG donne

$$MP = PG \sin MGP;$$

et, comme l'angle BKO = MGP, on a

$$MP = PG \sin BKO.$$

Or, d'après un principe connu,

$$\frac{\sin BKO}{\sin BOK} = \frac{BO}{BK} = \frac{1}{BK} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\theta}}.$$

D'ailleurs,

$$\sin BOK = \sin\theta, \qquad PG = y' - ax' - b;$$

on a donc, en posant MP = δ,

$$\delta = \frac{(y' - ax' - b)\sin\theta}{\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\theta}}.$$

48. L'équation de la ligne droite prend une forme élégante quand on y fait entrer les distances de l'origine aux points de rencontre de cette ligne avec les axes.

En reprenant l'équation générale

$$(1) \qquad Ay + Bx + C = 0,$$

nous supposerons successivement

$$x = 0, \quad y = 0;$$

ce qui donnera

$$y = -\frac{C}{A} \quad \text{et} \quad x = -\frac{C}{B}.$$

Si l'on pose

$$-\frac{C}{A} = b, \quad -\frac{C}{B} = a,$$

il en résulte

$$A = -\frac{C}{b}, \quad B = -\frac{C}{a}.$$

Ces valeurs, portées dans l'équation (1), donneront

$$-\frac{Cy}{b} - \frac{Cx}{a} + C = 0;$$

d'où l'on déduit, en divisant par C et en changeant les signes,

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1.$$

49. A l'aide de ce qui précède, on peut résoudre les questions qui ne dépendent que de la ligne droite, et qui sont relatives à des points situés sur un même plan. Nous allons faire quelques applications.

Démontrer que les trois perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle se coupent en un même point (fig. 31).

Soit ABC le triangle proposé; prenons pour axe des x le côté AB, et pour axe des y la perpendiculaire AY élevée au point A sur AB. Nommons x', y' les coordonnées du point C, et x'' l'abscisse du point B, pour lequel l'ordonnée est nulle. L'équation de OM, perpendiculaire au milieu de AB, est

$$x = \frac{x''}{2}.$$

La perpendiculaire PO sur AC, passant par le point P dont

les coordonnées sont $\frac{y'}{2}$, $\frac{x'}{2}$, a une équation de la forme

$$y - \frac{y'}{2} = a'\left(x - \frac{x'}{2}\right).$$

Si l'on désigne par a la tangente de l'angle CAX, on a

$$a = \frac{y'}{x'};$$

et, comme on doit avoir

$$1 + aa' = 0,$$

il en résulte

$$a' = -\frac{1}{a} = \frac{-x'}{y'};$$

ce qui donne

$$(2)\qquad y - \frac{y'}{2} = \frac{-x'}{y'}\left(x - \frac{x'}{2}\right)$$

pour l'équation de la perpendiculaire PO. Les coordonnées du point N étant les demi-sommes de celles des points B, C, auront pour valeurs

$$\frac{x' + x''}{2},\quad \frac{y'}{2}.$$

Et, comme la tangente de l'angle CBX est $\frac{y'}{x' - x''}$, on aura, en ayant égard à la condition de perpendicularité,

$$(3)\qquad y - \frac{y'}{2} = \frac{x'' - x'}{y'}\left(x - \frac{x' + x''}{2}\right)$$

pour l'équation de la droite NO.

Pour trouver les coordonnées du point de rencontre des droites PO, NO, on égalera les seconds membres de leurs équations; ce qui donnera, en supprimant de part et d'autre le dénominateur y',

$$-x'\left(x - \frac{x'}{2}\right) = (x'' - x')\left(x - \frac{x' + x''}{2}\right).$$

Effectuant les opérations indiquées et réduisant, on trouve

$$x = \frac{x''}{2};$$

d'où l'on conclut que les trois perpendiculaires se coupent au même point O.

Déterminons maintenant le rayon R du cercle circonscrit au triangle. A cet effet, cherchons l'ordonnée du point O. Nous l'obtiendrons en remplaçant x par $\frac{x''}{2}$ dans l'équation (2) par exemple. Le calcul, très-facile à exécuter, conduit à

$$y = \frac{y'}{2} - \frac{x'x''}{2y'} + \frac{x'^2}{2y'} = \frac{y'^2 + x'^2 - x'x''}{2y'} = \frac{b^2 - x'x''}{2y'},$$

en désignant par b le côté AC. On a alors

$$R = \sqrt{\frac{x''^2}{4} + \frac{(b^2 - x'x'')^2}{4y'^2}} = \frac{1}{2y'}\sqrt{x''^2(y'^2 + x'^2) + b^4 - 2b^2x'x''}$$

$$= \frac{1}{2y'}\sqrt{b^2x''^2 + b^4 - 2b^2x'x''} = \frac{b}{2y'}\sqrt{x''^2 + b^2 - 2x'x''} = \frac{ba}{2y'},$$

en remarquant que le radical est la valeur de BC ou a.

De l'égalité $R = \frac{ab}{2y'}$, on tire

$$ab = 2Ry';$$

c'est-à-dire que dans tout triangle le produit de deux côtés est égal au produit du diamètre du cercle circonscrit par la hauteur relative au troisième côté : proposition qu'on démontre en géométrie.

50. *Démontrer que dans tout triangle les droites menées des sommets aux milieux des côtés opposés se coupent en un même point.*

Nous prendrons pour *axes* les côtés AB, AC (*fig.* 32). Les coordonnées du point A seront

$$x = 0, \quad y = 0;$$

celles du point B,

$$x = x'', \quad y = 0;$$

D'où il résulte qu'en prolongeant l'ordonnée PM d'une longueur P′M égale à cette ordonnée, le point P′ appartiendra à la droite, et, par suite, le lieu demandé est la droite P′AP″.

On peut remarquer que l'équation (3) ne change pas quand on y remplace x', y' par des quantités qui leur soient proportionnelles, c'est-à-dire par les coordonnées d'un point quelconque de la droite APQ, qui joint le point donné à l'origine. D'où il faut conclure que, quel que soit le point que l'on prenne sur cette droite APQ, le lieu géométrique des points O, O′, etc., sera toujours la même droite P′P″.

52. Nous proposerons au lecteur les exercices suivants :

Problème I. — *Trouver la surface d'un triangle en fonction des coordonnées des sommets.*

Problème II. — *Mener par un point donné hors d'une droite une seconde droite qui forme avec la première un angle connu.*

Théorème I. — *Les diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties égales.*

Théorème II. — *Les bissectrices des angles d'un triangle se coupent en un même point.*

Théorème III. — *Dans tout triangle rectiligne, le centre du cercle circonscrit, le point de concours de médianes, le point d'intersection des trois hauteurs, sont toujours en ligne droite.*

Problème III. — *Deux droites qui se coupent étant données, trouver le lieu géométrique : 1°. des points dont la somme des distances aux deux droites égale une longueur connue ; 2°. des points dont la différence des distances aux deux droites égale une longueur connue ; 3°. des points dont le rapport des distances aux deux droites égale une quantité donnée.*

CHAPITRE CINQUIÈME.

DU CERCLE.

53. On a vu (nº 29) que l'équation générale de la circonférence est

$$(1)\quad (y-\beta)^2+(x-\alpha)^2+2(y-\beta)(x-\alpha)\cos\theta=r^2,$$

θ étant l'angle des axes; α, β les coordonnées du centre, et r le rayon.

Lorsque l'angle θ des axes est droit, le cosinus étant égal à zéro, l'équation se réduit à

$$(2)\qquad (y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=r^2.$$

En plaçant l'origine des coordonnées en un point de la circonférence, et en conservant les axes rectangulaires, on aura (*fig.* 34)

$$\beta^2+\alpha^2=r^2,$$

ce qui réduira l'équation (2) à

$$(3)\qquad y^2-2\beta y+x^2-2\alpha x=0.$$

Si l'on fait passer l'axe des abscisses par le centre (*fig.* 35), et si on laisse l'origine sur la circonférence, l'ordonnée du centre étant alors nulle et l'abscisse étant r, l'équation (3) devient

$$y^2+x^2-2rx=0.$$

Si l'on place l'origine des coordonnées au centre, l'équation de la circonférence sera, dans le cas des axes obliques,

$$y^2+x^2+2xy\cos\theta=r^2,$$

et, dans le cas des axes rectangulaires,

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

54. L'équation

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2$$

étant développée, conduit à une équation de la forme

$$y^2 + x^2 + by + ax + c = 0,$$

qui ne renferme pas le rectangle des variables, et dans laquelle les carrés de ces variables ont des coefficients égaux et de même signe.

Lorsque ces conditions sont remplies, l'équation ne peut représenter d'autre ligne qu'une circonférence de cercle rapportée à des axes rectangulaires.

En effet, l'équation dont il s'agit peut être mise sous la forme

$$\left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} - c,$$

qui représente une circonférence dont les coordonnées du centre sont $-\frac{b}{2}$, $-\frac{a}{2}$, et le rayon $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4} - c}$, pourvu, toutefois, que $\frac{a^2 + b^2}{4} - c$ soit positif.

Si $\frac{a^2 + b^2}{4} - c = 0$, le cercle se réduit à son centre.

Et si $\frac{a^2 + b^2}{4} - c$ est négatif, l'équation est impossible.

55. L'équation

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 + 2(y - \beta)(x - \alpha)\cos\theta = r^2$$

étant développée, donne

$$(1)\left\{\begin{array}{l} y^2 + x^2 + 2xy\cos\theta - 2(\beta + \alpha\cos\theta)y - 2(\alpha + 2\beta\cos\theta)x \\ + \beta^2 + \alpha^2 + 2\alpha\beta\cos\theta - r^2 = 0, \end{array}\right.$$

dans laquelle les coefficients des carrés des variables sont égaux à l'unité, et le coefficient du terme qui contient leur rectangle égale le double du cosinus de l'angle des axes.

Toutes les fois que les conditions qui viennent d'être énoncées seront remplies par une équation du second degré entre coordonnées obliques, cette équation ne pourra pas représenter d'autre ligne qu'une circonférence de cercle.

En effet, soit l'équation

$$(2)\qquad y^2 + x^2 + 2xy\cos\theta + by + ax + c = 0.$$

En l'identifiant avec l'équation (1), on obtient

$$2(6 + \alpha\cos\theta) = -b,\quad 2(\alpha + 6\cos\theta) = -a,$$

$$6^2 + \alpha^2 + 2\alpha 6\cos\theta - r^2 = c.$$

De ces trois dernières égalités on tire facilement

$$\alpha = \frac{b\cos\theta - a}{2\sin^2\theta},\quad 6 = \frac{a\cos\theta - b}{2\sin^2\theta},$$

$$r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}{4\sin^2\theta} - c}.$$

En reportant ces valeurs de α, 6, r dans l'équation (1), elle devient identique avec l'équation (2). Cette dernière représente donc une circonférence, si $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}{4\sin^2\theta} - c}$ est une quantité réelle.

Lorsque le radical est nul, la courbe se réduit à son centre; c'est-à-dire que l'équation ne représente plus qu'un point.

Si le radical est imaginaire, l'équation est impossible.

Quand l'équation (2) représente une circonférence de cercle, pour trouver le centre il n'est pas nécessaire de construire les valeurs de α et 6.

En effet, soit C (*fig.* 36) le centre demandé; si l'on abaisse

de ce point des perpendiculaires CM, CN sur les axes, et si l'on mène à ces derniers les parallèles CP, CQ, on aura

$$AN = AQ + QN = \beta + \alpha \cos \theta = -\frac{b}{2},$$

et

$$AM = AP + PM = \alpha + \beta \cos \theta = -\frac{a}{2}.$$

On voit alors qu'en prenant avec des signes contraires dans l'équation (2) les moitiés des coefficients des termes du premier degré, on aura les longueurs AN, AM, et, par suite, le centre C, en élevant des perpendiculaires aux axes par les points N, M.

Théorèmes relatifs au cercle.

56. L'équation du cercle rapporté à deux axes rectangulaires passant par le centre est, comme on l'a vu,

$$y^2 + x^2 = r^2. \tag{1}$$

On en tire

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

On voit qu'à chaque valeur AP (*fig.* 37) de x correspondent deux valeurs MP, M'P de y, égales et de signes contraires; et puisque MM' est perpendiculaire sur AB, si l'on applique la partie inférieure BM'B' de la circonférence sur la partie supérieure BMB', ces deux parties devront coïncider. On conclut de là que : 1°. *Tout diamètre* B'AB *divise la circonférence et le cercle en deux parties égales; 2°. tout diamètre perpendiculaire sur une corde divise aussi cette corde et l'arc sous-tendu en deux parties égales.*

L'équation (1) donne

$$y^2 = r^2 - x^2 = (r + x)(r - x).$$

Si l'on suppose

$$x = AP, \quad y = MP,$$

on aura

$$r + x = B'P, \quad r - x = BP,$$

par suite,

$$\overline{MP}^2 = B'P \times BP;$$

donc, l'ordonnée perpendiculaire au diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segments de ce diamètre.

Si l'on mène la corde B'M, et si l'on désigne toujours par x et y les coordonnées du point M, on aura

$$\overline{B'M}^2 = y^2 + (r + x)^2 = y^2 + x^2 + 2rx + r^2 = 2r^2 + 2rx,$$

parce que

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

L'égalité

$$\overline{B'M}^2 = 2r^2 + 2rx$$

revient à

$$\overline{B'M}^2 = 2r(r + x) = B'B \times B'P.$$

On en conclut que la corde B'M est moyenne proportionnelle entre le diamètre et le segment adjacent à cette corde.

Les équations des droites B'M, BM, menées des extrémités d'un diamètre à un point quelconque de la courbe, sont

$$y = a(x + r), \quad y = a'(x - r).$$

On en déduit

$$a = \frac{y}{x + r}, \quad a' = \frac{y}{x - r},$$

et, en multipliant ces deux valeurs,

$$aa' = \frac{y^2}{x^2 - r^2} = \frac{r^2 - x^2}{x^2 - r^2} = -1,$$

puisque le point M, dont les coordonnées sont x, y, appar-

tient à la courbe. La relation $aa' = -1$ montre que les droites B'M, BM sont perpendiculaires, c'est-à-dire que *tout angle inscrit dans un demi-cercle est droit.*

57. On peut démontrer, en général, *que tous les angles inscrits dans un même segment sont égaux entre eux.*

Soit DMB (*fig.* 38) le segment quelconque que l'on considère. Prenons pour axe des x la corde du segment, et pour axe des y la perpendiculaire élevée au milieu de cette corde.

En désignant par β l'ordonnée CA du centre, et en faisant $BD = 2c$, l'équation du cercle sera

$$(y-\beta)^2 + x^2 = r^2 \quad \text{ou} \quad y^2 + x^2 - 2\beta y + \beta^2 = r^2,$$

équation qui se réduit à

$$y^2 + x^2 - 2\beta y - c^2 = 0,$$

parce que

$$r^2 - \beta^2 = c^2.$$

Les équations des droites DM, BM sont respectivement

$$y = a(x+c), \quad y = a'(x-c).$$

On en déduit

$$a = \frac{y}{x+c}, \quad a' = \frac{y}{x-c}.$$

Or,

$$\text{tang DMB} = \frac{a'-a}{1+aa'};$$

remplaçant a et a' par les valeurs qui précèdent, on a

$$\text{tang DMB} = \frac{\dfrac{y}{(x-c)} - \dfrac{y}{x+c}}{1 + \dfrac{y^2}{x^2-c^2}} = \frac{2cy}{x^2+y^2-c^2}.$$

Comme le point M est sur le cercle, on a, entre ses coor-

données, la relation

$$y^2 + x^2 - 2by - c^2 = 0,$$

de laquelle on tire

$$y^2 + x^2 - c^2 = 2by,$$

ce qui conduit à

$$\text{tang DMB} = \frac{2cy}{2by} = \frac{c}{b}.$$

Donc, *tous les angles inscrits dans un même segment sont égaux entre eux.*

L'angle ACB, moitié de l'angle au centre DCB, a pour tangente $\frac{c}{b}$; il est donc égal à l'angle inscrit DMB.

58. *Démontrons les théorèmes relatifs aux lignes qui se coupent, soit hors du cercle, soit dans l'intérieur du cercle.*

Soient deux sécantes quelconques ABC, ADE (*fig.* 39), partant du point extérieur A au cercle. En rapportant la courbe à ces droites, son équation sera de la forme

$$(1) \qquad y^2 + x^2 + 2xy\cos\theta + ax + by + c = 0,$$

θ étant l'angle des axes.

En faisant $x = 0$ dans l'équation (1), il vient

$$y^2 + by + c = 0,$$

équation dans laquelle c représente le produit des distances AB, AC. L'hypothèse $y = 0$ donne

$$x^2 + ax + c = 0,$$

c représentant actuellement le produit de AD par AE. On a donc

$$AB \times AC = AD \times AE;$$

c'est-à-dire que les sécantes entières sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures.

On démontrerait d'une manière tout à fait semblable que deux cordes qui se rencontrent dans le cercle, se coupent en parties réciproquement proportionnelles.

59. *Déterminons par le calcul les conditions d'intersection d'une droite et d'un cercle.*

Soient

$$(1) \qquad y^2 + x^2 = r^2,$$

l'équation du cercle, et

$$(2) \qquad y = ax + b,$$

celle de la droite.

Pour trouver les coordonnées des points communs à ces deux lignes, remplaçons, dans la première équation, y par sa valeur tirée de la seconde, il viendra

$$(ax + b)^2 + x^2 = r^2,$$

ou

$$(3) \qquad (a^2 + 1)x^2 + 2abx + b^2 - r^2 = 0;$$

d'où

$$x = \frac{-ab \pm \sqrt{a^2b^2 - (a^2+1)(b^2 - r^2)}}{a^2 + 1} = \frac{-ab \pm \sqrt{(a^2+1)r^2 - b^2}}{a^2 + 1}.$$

Pour qu'il y ait réellement intersection, il faut que ces valeurs de x soient réelles, c'est-à-dire que l'on ait

$$(a^2 + 1)r^2 > b^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + 1}} < r;$$

or, le premier membre de cette inégalité représente la distance du centre à la droite : on voit donc que cette dernière ne peut couper le cercle qu'autant que sa distance au centre est moindre que le rayon.

Lorsqu'on a $(a^2 + 1)r^2 = b^2$, les deux racines de l'équation (3) sont égales à $\frac{-ab}{a^2 + 1}$; en portant cette valeur com-

mune dans $y = ax + b$ on obtient

$$y = \frac{b}{a^2 + 1}.$$

Dans ce cas, la droite n'ayant plus avec le cercle qu'un seul point commun dont les coordonnées sont

$$x' = -\frac{ab}{a^2 + 1}, \quad y' = \frac{b}{a^2 + 1},$$

est tangente au cercle en ce point. Des valeurs de x' et y' on tire, par la division,

$$a = -\frac{x'}{y'}.$$

Multipliant membre à membre les équations

$$(a^2 + 1)\, r^2 = b^2, \quad \frac{b}{a^2 + 1} = y',$$

il vient

$$r^2 = by', \quad \text{d'où} \quad b = \frac{r^2}{y'}.$$

Portant ces valeurs de a et b dans $y = ax + b$, on a

$$y = -\frac{x'}{y'}x + \frac{r^2}{y'}, \quad \text{ou} \quad yy' + xx' = r^2;$$

cette dernière équation, que nous retrouverons bientôt, par une autre méthode, représente la tangente au point de la circonférence dont les coordonnées sont x', y'.

60. *Cherchons actuellement les conditions relatives à l'intersection et au contact des cercles.*

Soient A, B (*fig.* 40) les centres des deux cercles, R, r, leurs rayons, et d la distance AB des centres.

Plaçons l'origine des coordonnées rectangulaires au centre A du premier cercle, et prenons pour axe des abscisses

la droite des centres; les équations des cercles A, B, seront

$$(1) \qquad y^2 + x^2 = R^2,$$

$$(2) \qquad y^2 + (d - x)^2 = r^2.$$

Pour obtenir les points communs aux deux circonférences, il faut chercher les solutions réelles communes aux équations (1), (2); si l'on retranche ces équations membre à membre, on obtient

$$2dx - d^2 = R^2 - r^2,$$

d'où

$$(3) \qquad x = \frac{R^2 - r^2 + d^2}{2d};$$

cette valeur portée dans l'équation (1) conduit à

$$(4) \qquad y = \pm \frac{1}{2d}\sqrt{4d^2R^2 - (R^2 - r^2 + d^2)^2}.$$

On ne peut avoir que deux solutions, d'où l'on déduit ce théorème connu : *Deux circonférences de cercle ne peuvent avoir plus de deux points communs à moins qu'elles ne se confondent.*

On a trouvé une seule valeur de x et deux valeurs de y égales et de signes contraires; on conclut de cette remarque que quand deux cercles se coupent, la droite qui passe par leurs centres est perpendiculaire sur le milieu de la corde qui joint leurs points d'intersection.

Pour que les deux circonférences se coupent réellement, il faut que la quantité placée sous le radical de la double valeur de y soit positive.

Cette quantité étant une différence de carré, on aura :

$$y = \pm \frac{1}{2d}\sqrt{(2dR + d^2 + R^2 - r^2)(2dR - d^2 - R^2 + r^2)},$$

et comme chaque facteur est, lui-même, une différence de

carrés, on pourra écrire :

$$y = \pm \frac{1}{2d}\sqrt{(d+R+r)\,(d+R-r)\,(R+r-d)\,(d+r-R)}.$$

Il est permis de placer l'origine au centre du plus grand cercle et de compter les abscisses positives dans le sens AB, et par conséquent de prendre d positivement; alors, les deux premiers facteurs sont positifs. Pour que y soit réelle, il faut que l'on ait à la fois

$$R+r-d > 0, \quad d+r-R > 0,$$

ou

$$R+r-d < 0, \quad d+r-R < 0;$$

les deux dernières inégalités ne peuvent être admises, puisqu'en les ajoutant membre à membre, on trouve $2r < 0$.

On tire des deux premières :

$$d < R+r, \quad d > R-r;$$

ce qui conduit à ce théorème connu : *Pour que deux cercles se coupent, il faut et il suffit que la distance des centres soit plus petite que la somme des rayons, et plus grande que leur différence.*

Pour qu'il y ait contact, il faut que les valeurs de y se réduisent à une seule, ce qui exige que la quantité sous le radical soit nulle; cette dernière condition sera remplie quand on aura

$$R+r-d=0, \quad \text{ou} \quad d+r-R=0,$$

ce qui revient à

$$d=R+r, \quad \text{ou} \quad d=R-r.$$

Donc, *pour que deux cercles se touchent, il faut que la distance des centres soit égale à la somme des rayons, ou bien égale à leur différence; dans les deux cas, le point de contact est sur la droite des centres.*

Les valeurs de y sont imaginaires lorsqu'on a

$$R + r - d < 0, \quad \text{ou} \quad d + r - R < 0,$$

ce qui revient à

$$d > R + r, \quad \text{ou} \quad d < R - r;$$

donc, *quand la distance des centres de deux cercles est plus grande que la somme ou plus petite que la différence des rayons, ces deux cercles n'ont aucun point commun.*

Si l'on suppose, en même temps, $R = r$, $d = 0$, les valeurs de x et de y se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$; en effet, les deux circonférences ayant le même centre et le même rayon, doivent avoir tous leurs points communs.

De la tangente et de la normale au cercle.

61. On nomme *tangente* à une courbe en un point donné M (*fig.* 41) la limite MT vers laquelle tend la direction d'une sécante MS, que l'on fait tourner autour de ce point, jusqu'à ce qu'un second point M′ d'intersection se rapprochant indéfiniment du premier vienne coïncider avec lui.

Le cercle étant rapporté à deux axes rectangulaires qui passent par le centre, proposons-nous de mener à cette courbe une tangente en un point donné.

Soit M le point de contact dont nous représenterons les coordonnées par x', y'; menons par ce point une sécante SM′M, et désignons par x'', y'', les coordonnées du point M′. L'équation de la sécante sera de la forme

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

Les points M, M′ étant sur la circonférence qui a pour

équation $y^2 + x^2 = r^2$, on aura

$$y'^2 + x'^2 = r^2, \quad y''^2 + x''^2 = r^2.$$

Déterminons la valeur du rapport $\frac{y'-y''}{x'-x''}$ d'après la condition déjà exprimée, que les deux points M, M' se trouvent sur la circonférence; à cet effet, retranchons membre à membre les deux dernières équations, il viendra

$$y'^2 - y''^2 + x'^2 - x''^2 = 0,$$

ou

$$(y' - y'')(y' + y'') + (x' - x'')(x' + x'') = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{y'-y''}{x'-x''} = -\frac{x'+x''}{y'+y''};$$

l'équation de la sécante est alors

$$y - y' = -\frac{x'+x''}{y'+y''}(x - x').$$

Lorsque le point M' se confond avec le point M, on a

$$x'' = x', \quad y'' = y',$$

et on obtient pour l'équation de la tangente au point M,

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x').$$

Faisant disparaître le dénominateur y', effectuant la multiplication par x' et remplaçant $y'^2 + x'^2$ par r^2, on arrive à l'équation plus simple

$$yy' + xx' = r^2.$$

On peut facilement reconnaître que cette dernière équation appartient à une droite qui n'a de commun avec la circonférence que le point dont les coordonnées sont x', y'.

En effet, si on prend les équations

$$(1) \qquad y'y + x'x = r^2,$$

$$(2) \qquad y'^2 + x'^2 = r^2;$$

en multipliant les deux membres de la première par 2, puis la retranchant membre à membre de la seconde équation, il vient

$$y'^2 - 2y'y + x'^2 - 2x'x = -r^2.$$

Ajoutant de part et d'autre $y^2 + x^2$, on a

$$(y - y')^2 + (x - x')^2 = y^2 + x^2 - r^2.$$

Or, pour toutes les valeurs de y et de x différentes de y', x', le premier membre est positif; par suite, on a

$$y^2 + x^2 - r^2 > 0.$$

Comme $y^2 + x^2$ représente le carré de la distance d'un point quelconque de la droite à l'origine, on en conclut que tous les points de cette ligne, excepté celui qui a pour coordonnées x', y', sont extérieurs au cercle.

62. *La méthode qui vient d'être employée s'applique au cas où le cercle est rapporté à des axes quelconques.*

Soit l'équation

$$(1) \quad (y - 6)^2 + (x - \alpha)^2 + 2(y - 6)(x - \alpha)\cos\theta = r^2.$$

Désignons toujours par x', y', les coordonnées du point de contact M.

En représentant par x'', y'', les coordonnées d'un second point M' de la circonférence, l'équation de la sécante SMM' sera de la forme

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

En exprimant que les points M, M' sont sur le cercle, on

a les équations

$$(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2+2(y'-\beta)(x'-\alpha)\cos\theta=r^2,$$
$$(y''-\beta)^2+(x''-\alpha)^2+2(y''-\beta)(x''-\alpha)\cos\theta=r^2.$$

Retranchant membre à membre, il vient

$$(\text{A})\quad\left\{\begin{array}{l} y'^2-y''^2-2\beta(y'-y'')+x'^2-x''^2-2\alpha(x'-x'') \\ \quad -2\alpha\cos\theta(y'-y'')-2\beta\cos\theta(x'-x'') \\ \quad +2\cos\theta(y'x'-y''x'')=0. \end{array}\right.$$

Le dernier terme

$$2\cos\theta(y'x'-y''x'')$$

revient à

$$2\cos\theta[y'(x'-x'')+x''(y'-y'')].$$

L'équation (A) peut être mise sous la forme

$$(y'-y'')(y'+y''-2\beta-2\alpha\cos\theta+2x''\cos\theta)$$
$$+(x'-x'')(x'+x''-2\alpha-2\beta\cos\theta+2y'\cos\theta)=0.$$

On en tire

$$\frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{x'+x''-2\alpha+2\cos\theta(y'-\beta)}{y'+y''-2\beta+2\cos\theta(x''-\alpha)}.$$

L'équation de la sécante SMM' est alors

$$y-y'=-\frac{x'+x''-2\alpha+2\cos\theta(y'-\beta)}{y'+y''-2\beta+2\cos\theta(x''-\alpha)}(x-x').$$

Si l'on suppose que le point M' coïncide avec M, on aura

$$x''=x',\quad y''=y',$$

et l'équation de la tangente sera

$$(\text{B})\qquad y-y'=-\frac{x'-\alpha+\cos\theta(y'-\beta)}{y'-\beta+\cos\theta(x'-\alpha)}(x-x'),$$

en joignant, toutefois, à cette équation, la condition

$$(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2+2(y'-\beta)(x'-\alpha)\cos\theta=r^2.$$

Quand les axes sont rectangulaires, l'équation de la tangente est

$$y-y'=-\frac{x'-\alpha}{y'-6}(x-x'),$$

en supposant qu'on a

$$(y'-6)^2+(x'-\alpha)^2=r^2.$$

Les deux équations précédentes peuvent être mises sous la forme

$$(y-y')(y'-6)+(x-x')(x'-\alpha)=0,$$
$$(y'-6)(y'-6)+(x'-\alpha)(x'-\alpha)=r^2.$$

En les ajoutant membre à membre, on obtient

$$(y'-6)(y-6)+(x'-\alpha)(x-\alpha)=r^2$$

pour équation de la tangente. Lorsque le centre du cercle est sur l'axe des abscisses, l'équation devient

$$y'y+(x'-\alpha)(x-\alpha)=r^2.$$

63. *Proposons-nous maintenant de mener au cercle une tangente par un point extérieur.*

Soient x'', y'', les coordonnées du point donné N (*fig.* 42). Si l'on représente par x', y', celles du point de contact, l'équation de la tangente sera

$$y'y+x'x=r^2.$$

Pour trouver y', x', on exprimera d'abord que le point donné appartient à la tangente, ce qui donnera l'équation

(1) $$y'y''+x'x''=r^2.$$

On aura en outre

(2) $$y'^2+x'^2=r^2,$$

pour exprimer que le point demandé est sur la circonférence.

On tire de l'équation (1),

$$y' = \frac{r^2 - x'x''}{y''};$$

cette valeur, portée dans l'équation (2), donne

$$(y''^2 + x''^2)x'^2 - 2r^2x''x' + r^2(r^2 - y''^2) = 0.$$

La résolution de cette équation conduit à

$$x' = \frac{r^2x'' \pm ry''\sqrt{y''^2 + x''^2 - r^2}}{y''^2 + x''^2}.$$

On obtient pour les valeurs correspondantes de y',

$$y' = \frac{r^2y'' \pm rx''\sqrt{y''^2 + x''^2 - r^2}}{y''^2 + x''^2}.$$

Lorsque le point donné est extérieur au cercle, on a

$$y''^2 + x''^2 > r^2;$$

les valeurs de x' et de y' sont réelles et inégales, et le problème a deux solutions.

Si le point donné est sur la circonférence, on a

$$y''^2 + x''^2 = r^2;$$

les deux systèmes de valeurs de x', y' se réduisent à un seul, et il n'y a plus qu'une tangente.

Dans le cas où le point est intérieur au cercle, on a

$$y''^2 + x''^2 < r^2;$$

les valeurs de x' et y' sont imaginaires, et le problème est impossible.

Il est facile de retrouver la construction qu'indique la géométrie élémentaire pour mener une tangente au cercle par un point extérieur.

Reprenons encore les équations

$$(1) \qquad y'y'' + x'x'' = r^2,$$

$$(2) \qquad y'^2 + x'^2 = r^2,$$

dans lesquelles nous regarderons comme des variables les coordonnées inconnues x', y' du point de contact.

En soustrayant la première de la seconde, et en complétant les carrés, on trouve

$$\left(y'-\frac{y''}{2}\right)^2+\left(x'-\frac{x''}{2}\right)^2=\frac{y''^2+x''^2}{4},$$

équation qui représente visiblement une circonférence dont les coordonnées du centre sont $\frac{y''}{2}$, $\frac{x''}{2}$, et qui a pour rayon $\frac{\sqrt{y''^2+x''^2}}{2}$. Puisque les coordonnées du point N sont y'', x'', celles du point O, milieu de AN, ont pour valeurs $\frac{y''}{2}$, $\frac{x''}{2}$. D'ailleurs $\sqrt{y''^2+x''^2}$ représente la distance AN; donc les points de contact sont sur une seconde circonférence ayant pour diamètre la distance du centre de la première au point donné.

On voit sans peine que, 1°. si le point donné N est extérieur, la circonférence décrite coupera la première; 2°. si le point est pris sur la première circonférence, la seconde sera tangente; 3°. que les deux circonférences sont intérieures l'une à l'autre, si le point donné est dans le cercle proposé.

64. On peut résoudre autrement le problème dont il s'agit. En considérant toujours les deux équations

$$y''y'+x''x'=r^2, \tag{1}$$

$$y'^2+x'^2=r^2; \tag{2}$$

si on y regarde encore y', x', comme des variables, la seconde de ces équations représentera le cercle donné, et la première, une ligne droite que nous déterminerons en cherchant ses points de rencontre avec les axes; en faisant suc-

cessivement $x'=0$, $y'=0$, on a

$$y'=\frac{r^2}{y''},\quad x'=\frac{r^2}{x''},$$

expressions faciles à construire.

La valeur $AT=\frac{r^2}{x''}$ (*fig.* 43) étant indépendante de y'', il en résulte que le point T ne doit pas changer, quelle que soit la position du point N sur la droite $N'N''$ perpendiculaire à l'axe des x. Cette droite $N'N''$ peut être regardée comme située d'une manière quelconque dans le plan du cercle, puisqu'on peut toujours prendre pour axe des x la perpendiculaire abaissée du centre sur cette droite. On est conduit alors au théorème suivant qui a son analogue dans les trois courbes du second degré :

Si de chacun des points d'une droite donnée sur le plan d'une circonférence, on mène des tangentes à cette courbe, et qu'on joigne les deux points de contact, toutes les lignes de jonction se couperont en un même point.

Il est visible que si la distance AT ne change pas, x'' reste le même; on conclut de là cette proposition réciproque :

Si par un point, T, *pris sur le plan d'un cercle on tire différentes sécantes à ce cercle, et que par les points où chaque sécante coupe la circonférence, on mène deux tangentes, le lieu des points de rencontre de ces tangentes, prises deux à deux, sera une ligne droite.*

65. Dans une courbe quelconque, on nomme *sous-tangente* la partie de l'axe des x comprise entre le pied de l'ordonnée du point de contact et le point où la tangente coupe ce même axe des x.

D'après cette définition, la sous-tangente est ici la distance TP (*fig.* 41). On en obtient la valeur en faisant

$y = 0$ dans l'équation de la tangente

$$y'y + x'x = r^2,$$

et en retranchant de la valeur de x correspondante à cette hypothèse, l'abscisse x' du point de tangence. On trouve alors

$$\text{TP} = \frac{r^2 - x'^2}{x'};$$

expression qui peut passer par tous les états de grandeur, en faisant varier x' de r à $-r$.

66. On appelle *normale* à une courbe quelconque, la droite menée par le point de contact perpendiculairement à la tangente. La *sous-normale* est la partie de l'axe des x, comprise entre le pied de l'ordonnée du point de contact et le point où la normale coupe ce même axe des x.

En désignant toujours par y', x', les coordonnées du point de tangence, l'équation de la normale sera de la forme

$$y - y' = a'(x - x').$$

Comme cette ligne doit être perpendiculaire à la tangente, on aura la condition

$$a' = -\frac{1}{a}, \quad = \frac{y'}{x'},$$

ce qui conduit à l'équation

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x');$$

si l'on effectue les réductions, on obtiendra

$$y = \frac{y'}{x'}x.$$

La normale passe ici par l'origine qui est le centre du cercle; on retrouve cette proposition connue: *le rayon mené au point de contact est perpendiculaire à la tangente.*

Problèmes et théorèmes sur le cercle et la ligne droite.

67. *Mener par un point pris sur le plan d'un cercle, une sécante telle que la partie comprise dans ce cercle soit égale à une ligne donnée.*

Soient x', y' les coordonnées du point donné M, et $2m$ la longueur de la corde. L'équation de la droite cherchée sera de la forme

$$(1) \qquad y - y' = a(x - x').$$

En rapportant le cercle à deux axes rectangulaires passant par le centre, son équation sera

$$(2) \qquad y^2 + x^2 = r^2;$$

si l'on désigne par x et y les coordonnées d'un des points de rencontre de la droite avec la circonférence, et si l'on représente par z la distance de ce point au point M, on aura

$$(3) \qquad z^2 = (y - y')^2 + (x - x')^2.$$

Si dans l'équation (3), on remplace $y - y'$ par sa valeur tirée de l'équation (1), il vient

$$z^2 = (a^2 + 1)(x - x')^2, \quad \text{d'où} \quad x - x' = \frac{z}{\sqrt{a^2 + 1}},$$

et, par suite,

$$y - y' = \frac{az}{\sqrt{a^2 + 1}};$$

en tirant de ces deux dernières équations les valeurs de x et de y, et en les portant dans l'équation (2), on a

$$(4) \qquad z^2 + \frac{2(ay' + x')}{\sqrt{a^2 + 1}} z + y'^2 + x'^2 - r^2 = 0.$$

Si l'on avait la valeur de a, qui convient à la position de la droite cherchée, la différence des racines de l'équation (4)

représenterait la partie de cette droite comprise dans le cercle. D'après cette proposition, nous allons égaler à $2m$ la différence des racines de l'équation dont il s'agit; en la résolvant, on trouve

$$z = \frac{-(ay' + x') \pm \sqrt{(ay' + x')^2 - (y'^2 + x'^2 - r^2)(a^2 + 1)}}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

La demi-différence des racines est

$$\sqrt{\frac{(ay' + x')^2 - (y'^2 + x'^2 - r^2)(a^2 + 1)}{a^2 + 1}};$$

on a alors, d'après l'énoncé, l'équation

$$\sqrt{\frac{(ay' + x')^2 - (y'^2 + x'^2 - r^2)(a^2 + 1)}{a^2 + 1}} = m,$$

d'où l'on déduit

$$(ay' + x')^2 - (y'^2 + x'^2 - r^2)(a^2 + 1) = m^2(a^2 + 1).$$

Le problème conservant sa généralité lorsqu'on fait passer l'axe des x par le point donné, nous supposerons $y' = 0$, il viendra

$$x'^2 - (x'^2 - r^2)(a^2 + 1) = m^2(a^2 + 1).$$

En effectuant les calculs indiqués, on arrive facilement à l'équation

$$a^2(m^2 + x'^2 - r^2) = r^2 - m^2,$$

qui donne

$$a = \pm \frac{\sqrt{r^2 - m^2}}{\sqrt{x'^2 - (r^2 - m^2)}}.$$

Cette expression prouve que m ne doit pas surpasser r, c'est-à-dire que la corde donnée ne doit pas être plus grande que le diamètre: en supposant $m < r$, et le point donné extérieur au cercle, les valeurs de a sont réelles; pour les construire, décrivons une circonférence sur le rayon AD

(*fig.* 44) comme diamètre, et portons la corde $DO = m$, nous aurons

$$AO = \sqrt{r^2 - m^2}.$$

Traçons ensuite une seconde circonférence ayant pour diamètre $AM = x'$ et prenons la corde $AI = AO$; la valeur du second radical sera représentée par MI : la tangente de l'angle AMI ayant pour expression

$$\frac{AI}{MI} = \frac{\sqrt{r^2 - m^2}}{\sqrt{x'^2 - (r^2 - m^2)}},$$

on aura

$$a = \text{tang AMI}.$$

La tangente de l'angle IMX sera

$$-\frac{\sqrt{r^2 - m^2}}{\sqrt{x'^2 - (r^2 - m^2)}}.$$

En menant au-dessous du diamètre la sécante MB′C′, de manière que l'angle $AMI' = AMI$, la tangente de AMI′ sera la seconde valeur de a. On aura donc pour réponse à la question les deux droites MBC, MB′C′.

Si le point donné M est intérieur, le second radical n'est réel qu'autant que m est au moins égal à $\sqrt{r^2 - x'^2}$, ce qui apprend que la plus petite corde que l'on puisse mener par un point donné dans un cercle, est celle qui est perpendiculaire au diamètre passant par ce point.

En imitant la construction exécutée précédemment, on trouvera encore deux cordes pour solution du problème.

Lorsque m est nulle, chaque sécante devient tangente, et les valeurs de a se réduisent à $\pm \frac{r}{\sqrt{x'^2 - r^2}}$. Si le point donné est intérieur au cercle, x' est plus petit que r, et les valeurs de a sont imaginaires. L'hypothèse $x' = r$ donne $a = \infty$, ce qui doit avoir lieu dans ce cas.

68. *Mener une tangente commune à deux cercles.*

Soient

$$y^2 + x^2 = R^2, \quad y^2 + (x - d)^2 = r^2,$$

les équations des circonférences données (*fig.* 45). L'équation de la tangente commune FC peut être mise sous la forme

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{c} = 1,$$

b, c, étant l'ordonnée et l'abscisse à l'origine. Nous allons chercher ces deux quantités, en exprimant que la droite $\frac{y}{b} + \frac{x}{c} = 1$ est tangente à chacun des cercles. L'équation de la tangente au cercle A, en un point quelconque (x', y'), est

$$yy' + xx' = R^2,$$

avec la condition

(C) $$y'^2 + x'^2 = R^2.$$

En supposant successivement $y = 0$, $x = 0$, on obtient

$$x = \frac{R^2}{x'}, \quad y = \frac{R^2}{y'}.$$

Si l'on égale ces valeurs à c et b, il vient

$$x' = \frac{R^2}{c}, \quad y' = \frac{R^2}{b};$$

ces dernières valeurs, portées dans l'équation (C), conduisent à

(1) $$R^2(b^2 + c^2) = b^2 c^2;$$

ce qui établit une première relation entre les inconnues b, c.

L'équation de la tangente au cercle B, au point (y', x'), est, comme on l'a vu,

(D) $$y'y + (x' - d)(x - d) = r^2,$$

avec la condition

(E) $$y'^2 + (x' - d)^2 = r^2.$$

Les hypothèses $y=0$, $x=0$, faites dans l'équation (D), donnent

$$x-d=\frac{r^2}{x'-d},\quad y=\frac{r^2+d(x'-d)}{y'}.$$

En égalant la première valeur à $c-d$, et la seconde à b, on a les équations

$$c-d=\frac{r^2}{x'-d},\quad b=\frac{r^2+d(x'-d)}{y'},$$

desquelles on tire

$$x'-d=\frac{r^2}{c-d},\quad y'=\frac{r^2+d(x'-d)}{b}=\frac{cr^2}{b(c-d)},$$

en remplaçant $x'-d$ par sa valeur.

Mettant ces valeurs de $x'-d$ et y' dans l'équation (E), on obtient, entre les inconnues b, c, la relation

$$(2)\qquad r^2(b^2+c^2)=b^2(c-d)^2.$$

En divisant membre à membre les équations (2), (1), il vient

$$\frac{r^2}{R^2}=\frac{(c-d)^2}{c^2},$$

d'où l'on tire

$$c=\frac{dR}{R\mp r}.$$

L'équation (1) donne

$$b=\pm\frac{cR}{\sqrt{c^2-R^2}}.$$

Pour construire la première valeur de c, on mène les rayons parallèles AG, BH, on joint les extrémités G, H par la droite GH, que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre en C, avec la ligne des centres ; les deux triangles semblables AGC, BHC donnent

$$AC:BC::AG:BH,\quad \text{ou}\quad AC:AC-BC::R:R-r;$$

or,

$$AC-BC=d;$$

donc

$$AC = \frac{dR}{R - r}.$$

Si l'on prolonge le rayon BH jusqu'à sa rencontre en H' avec la circonférence, et qu'on joigne les points H', G, on aura (*fig.* 45)

$$AC' : C'B :: AG : BH', \quad \text{ou} \quad AC' : AC' + C'B :: R : R + r,$$

et comme $AC' + C'B = d$, il en résulte

$$AC' = \frac{dR}{R + r}.$$

Quand les cercles sont extérieurs l'un à l'autre, on a

$$d > R + r,$$

et, à fortiori,

$$d > R - r.$$

Les deux valeurs de c étant alors plus grandes que R, les valeurs de b sont réelles; et comme à chaque valeur de c correspondent deux valeurs de b, le problème admet quatre solutions.

Si les cercles se touchent extérieurement, $d = R + r$, la première valeur de c surpasse R, et la seconde est égale à R; dans ce cas, la question a trois solutions.

Quand les cercles se coupent, on a, à la fois,

$$d < R + r, \quad d > R - r;$$

alors, la première valeur de c l'emporte sur R, et la seconde est moindre que R; celle-ci donne pour b des valeurs imaginaires, et le nombre des solutions se réduit à deux.

Lorsque les cercles se touchent intérieurement, on a

$$d = R - r,$$

et, par suite, d est moindre que $R + r$. La première valeur de c est R, et la seconde est plus petite que R; celle-ci donne

pour b des valeurs imaginaires, l'autre rend b égal à l'infini : elle est seule admissible, et alors le problème n'a qu'une seule solution.

Enfin, la question est impossible lorsque les deux cercles sont intérieurs l'un à l'autre; car, les valeurs de c étant moindres que R, celles de b sont imaginaires.

On voit facilement ce qui arriverait si les deux cercles avaient des rayons égaux.

69. *Trouver le lieu géométrique des points dont la différence des carrés des distances à deux points donnés soit égale à un carré aussi donné.*

Soient C, D, les deux points donnés (*fig.* 46). Prenons pour axe des abscisses la droite qui joint ces deux points, et pour axe des ordonnées la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite. En nommant y, x, les coordonnées de l'un quelconque, M, des points demandés, $2d$ la distance CD des deux points, et m^2 le carré donné, on aura

$$\overline{MC}^2 = y^2 + (x + d)^2, \quad \overline{MD}^2 = y^2 + (d - x)^2,$$

et, par suite,

$$y^2 + (x + d)^2 - y^2 - (d - x)^2 = m^2.$$

Effectuant les calculs et réduisant, on obtient

$$4dx = m^2, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{m^2}{4d};$$

le lieu demandé est donc une parallèle à l'axe des y.

Cette valeur de x est une troisième proportionnelle à d et $\frac{m}{2}$.

Il est visible que la perpendiculaire P′M′ élevée sur AX, au point P′, à la même distance de A que le point P, doit être regardée comme une réponse à la question.

70. *Trouver le lieu des points dont la somme des carrés*

des distances à deux points fixes soit égale à un carré donné (fig. 47).

Si l'on désigne par z, z' les distances d'un point quelconque, M, du lieu cherché, aux deux points fixes C, D, on aura, d'après l'énoncé,

$$z^2 + z'^2 = m^2,$$

en représentant par m^2 le carré donné. En prenant la valeur de z par exemple, on trouvera

$$z = \sqrt{m^2 - z'^2}.$$

Cette expression prouve que la valeur de z' est limitée; il est clair qu'il en est de même de celle de z. Nous ferons remarquer, en outre, que le lieu demandé est symétrique par rapport à la droite CD et à la perpendiculaire élevée au milieu de cette droite. C'est pour cette raison que nous prendrons ces deux lignes pour axes des coordonnées.

En désignant toujours par x et y les coordonnées du point quelconque M répondant à la question, et la distance CD par $2d$, on aura

$$z^2 = y^2 + (x + d)^2, \quad z'^2 = y^2 + (d - x)^2,$$

et, par conséquent,

$$y^2 + (x + d)^2 + y^2 + (d - x)^2 = m^2,$$

ou

$$2y^2 + 2x^2 + 2d^2 = m^2.$$

De cette équation on déduit

$$y^2 + x^2 = \frac{m^2 - 2d^2}{2}.$$

Le lieu demandé est donc une circonférence de cercle ayant pour centre l'origine des coordonnées, et pour rayon $\sqrt{\dfrac{m^2 - 2d^2}{2}}$.

Pour construire cette valeur, nous l'écrirons sous la forme $\frac{1}{2}\sqrt{2(m^2 - 2d^2)}$.

Au point D nous élèverons sur CD la perpendiculaire

$$DG = AD = d.$$

Le carré de AG sera égal à $2d^2$. Au point A sur AG, nous mènerons la perpendiculaire AN, et nous décrirons du point G avec m pour rayon un arc de cercle rencontrant cette ligne au point H; le carré de AH aura pour valeur $m^2 - 2d^2$. Enfin, nous élèverons au point H sur AN la perpendiculaire HK = AH, et le carré de AK égalera

$$2(m^2 - 2d^2).$$

Le rayon du cercle sera donc égal à la moitié de la droite AK.

Pour que le problème soit possible, il faut que m soit au moins égal à $d\sqrt{2}$. La valeur de m peut d'ailleurs être aussi grande que l'on voudra.

Si $m^2 = 4d^2$, le rayon est égal à d, et, par conséquent, le cercle qui répond au problème a pour diamètre la distance des deux points donnés.

71. *Trouver le lieu de tous les points desquels on peut mener des tangentes égales à deux circonférences données.*

Soient x et y les coordonnées rectangulaires de l'un des points demandés; $(\alpha, 6)$, $(\alpha', 6')$ celles des centres des deux circonférences données; r, r' les rayons de ces courbes, et t la longueur commune des tangentes.

On aura :

$$(y - 6)^2 + (x - \alpha)^2 = t^2 + r^2,$$
$$(y - 6')^2 + (x - \alpha')^2 = t^2 + r'^2.$$

Si l'on retranche ces deux équations membre à membre, l'indéterminée t disparaîtra, et l'équation résultante sera

$$(1) \quad \begin{cases} (2y - 6 - 6')(6' - 6) + (2x - \alpha - \alpha')(\alpha' - \alpha) \\ - r^2 + r'^2 = 0; \end{cases}$$

le lieu demandé est donc une ligne droite perpendiculaire

sur la ligne des centres : on l'appelle *axe radical* des deux circonférences.

Nous ferons remarquer que cette équation est celle qu'on obtiendrait en retranchant membre à membre les équations des deux circonférences données

$$(y-6)^2+(x-\alpha)^2-r^2=0,$$
$$(y-6')^2+(x-\alpha')^2-r'^2=0.$$

Si l'on représente par $A=0$, $B=0$, les équations des deux cercles, l'équation (1) sera remplacée par $A-B=0$. Or, cette dernière équation étant vérifiée par les systèmes qui satisfont en même temps à $A=0$, $B=0$, représente la ligne qui passe par les points communs aux deux circonférences lorsqu'elles se coupent. Donc, cette ligne n'est autre chose que la corde commune indéfiniment prolongée.

Les axes radicaux de trois cercles concourent en un même point qu'on nomme leur CENTRE RADICAL. En effet, si l'on représente par $A=0$, $B=0$, $C=0$, les équations de trois circonférences, celles de leurs axes radicaux seront

$$A-B=0,\quad A-C=0,\quad B-C=0.$$

L'équation

$$B-C=0$$

étant la différence des deux précédentes, la droite qu'elle représente passe par le point d'intersection des lieux de ces dernières.

Le théorème est donc démontré.

On déduit de ce qui précède un moyen simple de construire l'axe radical de deux circonférences qui ne se rencontrent pas. Il suffit pour cela de les couper toutes deux par une circonférence auxiliaire, de prolonger les cordes communes jusqu'à leur rencontre, et d'abaisser du point d'intersection une perpendiculaire sur la droite qui passe par les centres.

72. Nous allons donner les énoncés de quelques problèmes à résoudre.

Problème I. — *Trouver le lieu des points desquels menant des tangentes à deux cercles donnés, le rapport de ces tangentes soit constamment égal à* $\frac{m}{n}$.

Problème II. — *Deux circonférences concentriques étant données, on mène par les différents points de la plus petite des tangentes que l'on termine à la seconde, et par les extrémités on conduit des tangentes à celle-ci : on propose de trouver le lieu des points d'intersection de ces dernières tangentes.*

Problème III. — *Trouver la ligne décrite par le sommet d'un angle droit dont les côtés sont toujours tangents à une circonférence donnée.*

Problème IV. — *Faire passer un cercle par trois points donnés.*

Problème V. — *Faire passer par deux points donnés un cercle tangent à une droite donnée.*

Problème VI. — *Trouver le lieu des points dont les distances à deux points fixes soient entre elles dans un rapport donné.*

Problème VII. — *Trouver la ligne décrite par le milieu d'une droite d'une longueur donnée, qui se meut dans un angle droit de manière que ses extrémités restent sur les côtés de cet angle.*

Problème VIII. — *Trouver le lieu des points qui divisent dans un rapport donné les lignes menées d'un point fixe aux différents points d'une circonférence.*

CHAPITRE SIXIÈME.

DE LA TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

73. En rapportant le cercle à deux axes obliques quelconques, nous avons trouvé pour cette courbe une équation assez compliquée; mais, en faisant un autre choix d'axes, on a pu simplifier l'équation et la réduire à trois termes : on conçoit, d'après cela, que l'équation d'une courbe doit être plus ou moins simple, selon le système d'axes auxquels on la rapporte.

D'une autre part, il peut arriver que l'on connaisse l'équation d'une ligne rapportée à un certain système d'axes, et qu'on ait besoin de trouver l'équation de cette même ligne rapportée à d'autres axes. La question sera résolue quand on connaîtra, pour un point quelconque de la ligne, les valeurs des coordonnées anciennes en fonction des nouvelles, puisqu'il n'y aura plus alors qu'à substituer ces valeurs dans l'équation primitive. C'est en cela que consiste le problème de la transformation des coordonnées.

Formules pour la transformation des coordonnées.

74. Supposons d'abord que les axes conservent la même direction, et qu'on déplace seulement l'origine. Soient A' (*fig.* 48) la nouvelle origine, et A'Y', A'X' les nouveaux axes; les coordonnées primitives d'un point quelconque M seront AP et PM, et les nouvelles coordonnées A'P', P'M. On a évidemment

$$AP = AB + BP = AB + A'P',$$
$$PM = PP' + P'M = A'B + P'M.$$

Faisons $AB = a$, $A'B = b$; désignons par x', y', les nouvelles coordonnées du point M, on aura alors

$$x = a + x', \quad y = b + y'.$$

Ces formules serviront à remplacer deux axes quelconques par d'autres axes parallèles aux premiers.

75. Résolvons maintenant la question générale, c'est-à-dire changeons à la fois l'origine et la direction des axes (*fig.* 49).

Soient AX, AY, les axes primitifs formant entre eux un angle quelconque θ; A'X', A'Y', les nouveaux axes. Menons par l'origine A' les droites A'K, A'H, respectivement parallèles aux axes AX, AY. La position des nouveaux axes est déterminée par les coordonnées de la nouvelle origine et par les angles qu'ils forment avec l'axe AX, ou avec la parallèle A'K à cet axe.

Nous ferons

$$AB = a, \quad BA' = b, \quad KA'X' = \alpha, \quad KA'Y' = \alpha'.$$

Pour un point M quelconque, les anciennes coordonnées sont AP, PM, et les nouvelles A'P', P'M. Par le pied P' de la nouvelle ordonnée du point M, menons les parallèles P'D, P'F aux axes primitifs AX, AY. Nous aurons

$$x = AP = a + BF + FP = a + A'E + P'D,$$

$$y = PM = PN + DN + MD = b + P'E + MD.$$

Le triangle A'P'E donne, par une proposition connue,

$$\frac{A'E}{A'P'} = \frac{\sin A'P'E}{\sin A'EP'}, \quad \frac{P'E}{A'P'} = \frac{\sin P'A'E}{\sin A'EP'}.$$

De même, le triangle P'DM conduit à

$$\frac{P'D}{MP'} = \frac{\sin P'MD}{\sin MDP'} \quad \text{et} \quad \frac{MD}{MP'} = \frac{\sin MP'D}{\sin MDP'}.$$

Mais, d'après les notations précédentes, on a

$$A'P' = x', \quad MP' = y', \quad \sin A'P'E = \sin(\theta - \alpha),$$

$$\sin A'EP' = \sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta, \quad \sin P'A'E = \sin\alpha,$$

$$\sin P'MD = \sin(\theta - \alpha'), \quad \sin MDP' = \sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta,$$

$$\sin MP'D = \sin\alpha'.$$

On obtient alors

$$A'E = \frac{x'.\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta}, \quad P'E = \frac{x'.\sin\alpha}{\sin\theta},$$

$$P'D = \frac{y' \sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta}, \quad MD = \frac{y'.\sin\alpha'}{\sin\theta};$$

d'où

$$(\delta) \qquad \begin{cases} x = a + \dfrac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta}, \\ y = b + \dfrac{x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'}{\sin\theta}. \end{cases}$$

Telles sont les formules générales de la transformation des coordonnées rectilignes.

Ces formules sont rarement employées; nous allons en déduire celles dont on fait ordinairement usage.

76. Pour passer d'un *système de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées obliques*, on suppose

$$\theta = 90^\circ;$$

on a alors

$$x = a + x' \cos\alpha + y' \cos\alpha',$$

$$y = b + x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'.$$

77. Pour passer d'un *système de coordonnées rectangulaires à un autre système de coordonnées aussi rectangulaires*, on suppose à la fois

$$\theta = 90^\circ, \quad \alpha' = 90^\circ + \alpha,$$

ce qui revient à faire, dans les formules précédentes,

$$\alpha' = 90^\circ + \alpha.$$

On obtient, dans ce cas,

$$x = a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha,$$
$$y = b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

78. Enfin, quand on doit passer d'*un système d'axes obliques à un système d'axes rectangulaires*, on suppose, dans les formules générales,

$$\alpha' = 90^\circ + \alpha.$$

On en déduit

$$x = a + \frac{x' \sin(\theta - \alpha) - y' \cos(\theta - \alpha)}{\sin \theta},$$

$$y = b + \frac{x' \sin \alpha + y' \cos \alpha}{\sin \theta}.$$

Remarques sur les formules relatives à la transformation des coordonnées.

79. Pour donner à ces formules toute la généralité qu'elles comportent, il faut que les coordonnées aient les signes qui conviennent à leur position, et que les angles aient des valeurs telles, que les nouveaux axes puissent prendre toutes les positions possibles relativement aux axes primitifs.

Si l'on considère les formules

$$(\alpha) \qquad x = a + x', \quad y = b + y',$$

d'après les conventions établies précédemment, x sera positif dans le sens AX (*fig.* 48), et négatif dans le sens opposé; de même, y est positif dans le sens AY, et négatif dans le sens contraire. La même remarque s'applique à x', y'.

Prenons, par exemple, un point M' (*fig.* 48) dans l'angle HAX, et situé entre les deux axes des ordonnées. On aura pour ce point,

$$x = AP'', \quad y = -P''M', \quad x' = -A'P''', \quad y' = -P'''M'.$$

Ces valeurs vérifient les formules (α). En effet, on a

$$AP'' = AB - BP'' = AB - A'P''' = a + x',$$

$$-P''M' = A'B - P'''M' = b + y'.$$

Si l'on donnait toute autre position au point M' et à la nouvelle origine A', on reconnaîtrait que les formules α se trouvent toujours vérifiées.

80. Quand on fait usage des formules générales (δ), il faut se rappeler : 1°. que θ est l'angle YAX (*fig.* 50) formé par les parties des axes primitifs, sur lesquelles se comptent les coordonnées positives, et que cet angle est toujours moindre que 180°; 2°. que les angles α et α' sont formés du côté des x positifs, par les parties des nouveaux axes sur lesquelles on prend les coordonnées positives. Pour évaluer ces derniers angles, on mène, par la nouvelle origine A', des parallèles A'E, A'C, aux anciens axes, dans le sens des coordonnées positives. Puis, on suppose que les nouveaux axes, d'abord appliqués sur A'E, tournent autour de l'origine A', en se rapprochant de A'C, pour prendre la position qu'ils ont actuellement. Les angles α et α' auront pour mesure les arcs décrits par un point quelconque de chacun des nouveaux axes.

Appliquons ces dernières remarques à un exemple particulier. Nous supposerons que

$$a = 3, \quad b = -2, \quad \theta = 78^\circ, \quad \alpha = \mathrm{KLG} = 295^\circ,$$
$$\alpha' = \mathrm{KLF} = 262^\circ.$$

En portant ces valeurs dans les formules générales, elles donnent

$$x = 3 + \frac{x' \sin(78^\circ - 295^\circ) + y' \sin(78^\circ - 262^\circ)}{\sin 78^\circ},$$

$$y = -2 + \frac{x' \sin 295^\circ + y' \sin 262^\circ}{\sin 78^\circ}.$$

Or,

$\sin(78^\circ - 295^\circ) = -\sin(295^\circ - 78^\circ) = -\sin(217^\circ) = \sin 37^\circ,$

$\sin(78^\circ - 262^\circ) = -\sin(262^\circ - 78^\circ) = -\sin 184^\circ = \sin 4^\circ,$

$\sin 295^\circ = -\sin(360^\circ - 295^\circ) = \sin 65^\circ,$

$\sin 262 = -\sin 82^\circ.$

On a donc

$$x = 3 + \frac{x' \sin 37^\circ + y' \sin 4^\circ}{\sin 78^\circ},$$

$$y = -2 + \frac{x' \sin 65^\circ - y' \sin 82^\circ}{\sin 78^\circ}$$

81. Les formules trouvées précédemment ne renfermant les variables qu'à la première puissance, quand on portera les valeurs qu'elles fournissent dans l'équation d'une courbe, le degré de cette équation restera le même. On voit d'abord qu'il ne pourra pas s'élever; il ne pourra pas non plus diminuer, puisque, s'il en était autrement, en revenant de la seconde équation à la première, le degré de l'équation s'élèverait.

82. Dans certains problèmes, les quantités a, b, α, α' sont données; dans d'autres, ces mêmes quantités sont indéterminées, et l'on profite de cette indétermination pour faire disparaître quelques-uns des termes de l'équation d'une courbe.

CHAPITRE SEPTIÈME.

LIGNES DU SECOND ORDRE.

Division des lignes du second ordre en trois genres.

83. Nous avons vu (nos 33...37) que toute équation du premier degré a pour lieu géométrique une ligne droite, et réciproquement, que toute droite est représentée par une équation du premier degré. Il résulte de là qu'une équation à deux variables d'un degré supérieur au premier, doit représenter, en général, une ligne courbe.

D'après ce que nous avons dit (n° 31) relativement à la classification des lignes algébriques, nous sommes conduits à chercher les courbes qui peuvent être représentées par l'équation du second degré.

L'équation la plus générale du second degré à deux variables est

$$(1) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Lorsque A n'est pas nul, en la résolvant par rapport à y, on a

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = -\dfrac{Bx}{2A} - \dfrac{D}{2A} \\ \pm \dfrac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF} \end{array} \right.$$

Soient, pour abréger,

$$-\frac{B}{2A} = a, \quad -\frac{D}{2A} = b,$$

$$B^2 - 4AC = n, \quad BD - 2AE = p, \quad D^2 - 4AF = q;$$

l'équation (2) deviendra

$$y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{nx^2 + 2px + q}.$$

Les deux valeurs de y ont une partie rationnelle commune $ax + b$, qui est l'ordonnée d'un point quelcónque d'une droite dont l'équation est

$$(3) \qquad y = ax + b.$$

Pour trouver les points déterminés par l'équation (1), on construira d'abord la droite HH′ (*fig.* 51), représentée par l'équation

$$y = ax + b.$$

Pour une abscisse quelconque AP, l'ordonnée de la droite étant PF, on devra porter de part et d'autre du point F, en L et L′, des longueurs égales à la valeur que prendra le radical

$$\frac{1}{2A}\sqrt{nx^2 + 2px + q}.$$

En répétant la même construction pour toutes les valeurs de x, qui font prendre au radical des valeurs réelles, on aura les différents points de la ligne représentée par l'équation (1).

La droite HH′ jouit de la propriété de diviser, en deux parties égales, toutes les cordes parallèles à l'axe des y; à cause de cette propriété, la ligne HH′ est nommée *diamètre*. On donne généralement le nom de *diamètre* au lieu géométrique des milieux d'une suite de cordes parallèles menées sous une direction primitive quelconque.

Pour abréger, nous ferons

$$Y = \frac{1}{2A}\sqrt{nx^2 + 2px + q},$$

et nous dirons que Y est l'*ordonnée comptée à partir du diamètre*.

On démontre en algèbre que pour un trinôme, tel que

$$nx^2 + 2px + q,$$

et même pour un polynôme de la forme

$$gx^m + hx^{m-1} + kx^{m-2} + \ldots,$$

on peut toujours assigner à x une valeur positive et une valeur négative, telles que les valeurs positives et négatives plus grandes donnent, pour ce polynôme, des résultats de même signe que le premier terme; on démontre, en outre, qu'en faisant croître x, positivement ou négativement jusqu'à l'infini, les valeurs absolues du polynôme augmentent elles-mêmes jusqu'à l'infini. D'après cela, à partir de certaines valeurs de x positives ou négatives, les valeurs du trinôme $nx^2 + 2px + q$ seront de même signe que nx^2, et comme x^2 est toujours positif, puisqu'on n'attribue à x que des valeurs réelles, le signe des résultats sera celui de n ou de $B^2 - 4AC$.

Lorsqu'on a

$$B^2 - 4AC < 0,$$

il existe des valeurs de x au delà desquelles, la quantité sous le radical étant négative, l'ordonnée Y est imaginaire; et comme les valeurs de x pour lesquelles Y est réel, ne peuvent jamais fournir qu'une valeur finie pour cette ordonnée, il en résulte que la courbe représentée par l'équation (1) est limitée dans le sens des abscisses positives et dans celui des abscisses négatives, et qu'elle l'est également de part et d'autre du diamètre. Cette courbe, limitée dans tous les sens, a été nommée *ellipse*.

Quand $B^2 - 4AC$ est positif, il existe des valeurs positives et négatives de x au delà desquelles l'ordonnée Y est toujours réelle; d'ailleurs, cette ordonnée peut croître jusqu'à l'infini; par conséquent, la courbe que l'équation (1)

représente est illimitée dans tous les sens : on lui donne le nom d'*hyperbole*.

Enfin, lorsque

$$B^2 - 4AC = 0,$$

Y se réduit à

$$\frac{1}{2A}\sqrt{2px + q}.$$

Si p est positif, x pourra recevoir des valeurs positives aussi grandes qu'on le voudra : mais, en attribuant à x des valeurs négatives, Y pourra devenir imaginaire. La courbe est donc illimitée dans le sens des x positifs, et limitée du côté des x négatifs. Le contraire a lieu lorsque p est négatif. Il résulte de là que, dans les deux cas, la courbe ne s'étend à l'infini que dans un seul sens. Cette courbe se nomme *parabole*.

Nous parlerons plus tard du cas où p est nul. On peut voir déjà que, le terme en x disparaissant sous le radical, l'équation ne peut plus représenter une courbe, puisqu'elle s'abaisse au premier degré.

Ce que nous venons de dire conduit à établir trois genres de courbes du second ordre.

Quoique nous ayons supposé complète l'équation du second degré, il est facile de reconnaître, comme nous allons le faire voir, que dans le cas où il manque quelque terme, on ne peut rencontrer d'autres courbes que celles dont nous avons parlé. Lorsque $A = 0$, et que C n'est pas nul, en résolvant l'équation (1) par rapport à x, on a

$$x = -\frac{B}{2C}y - \frac{E}{2C}$$

$$\pm\frac{1}{2C}\sqrt{B^2y^2 + 2(BE - 2CD)y + E^2 - 4CF}.$$

En supposant B différent de zéro, le premier terme B^2y^2 de la quantité placée sous le radical est toujours positif. Alors,

8.

en raisonnant comme précédemment, on verra que la courbe est illimitée dans tous les sens. Cette courbe est donc du genre de l'hyperbole.

Si l'on a, à la fois, $A = 0$, $B = 0$, en résolvant l'équation par rapport à x, on reconnaît facilement que la courbe doit être comptée parmi les paraboles.

Lorsqu'on a $A = 0$, $C = 0$, B n'étant pas nul, l'équation du second degré devient

$$Bxy + Dy + Ex + F = 0.$$

Et, comme elle est du premier degré par rapport à chacune des variables, en donnant à l'une quelconque de ces variables des valeurs aussi grandes que l'on voudra, les valeurs de l'autre seront toujours réelles : la courbe s'étend donc à l'infini dans tous les sens, et doit être rangée parmi les hyperboles.

Il résulte de ce qui précède qu'il n'existe que trois genres de courbes du second degré : 1°. les ellipses, qui sont des courbes limitées dans tous les sens et pour lesquelles on a

$$B^2 - 4AC < 0;$$

2°. les hyperboles, qui sont des courbes illimitées dans tous les sens et pour lesquelles on a

$$B^2 - 4AC > 0;$$

3°. les paraboles, qui sont des courbes illimitées dans un sens et limitées dans l'autre, et pour lesquelles on a

$$B^2 - 4AC = 0.$$

Nous allons actuellement examiner en particulier chacun de ces trois genres de courbes.

Discussion de l'ellipse.

$$B^2 - 4AC < 0.$$

84. En résolvant l'équation générale du second degré, on

a trouvé précédemment

$$(1) \qquad y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{nx^2 + 2px + q}.$$

Comme n est négatif, nous remplacerons ce coefficient par $-\delta^2$, ce qui donnera

$$y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{-\delta^2 x^2 + 2px + q},$$

ou

$$y = ax + b \pm \frac{\delta}{2A}\sqrt{-\left(x^2 - \frac{2p}{\delta^2}x - \frac{q}{\delta^2}\right)}.$$

Soit H′H (*fig.* 51) le diamètre dont l'équation est

$$y = ax + b.$$

Pour les points où cette droite est rencontrée par la courbe, l'ordonnée Y est nulle; on aura donc les abscisses de ces points, en posant

$$x^2 - \frac{2p}{\delta^2}x - \frac{q}{\delta^2} = 0.$$

Nous désignerons généralement les racines de cette équation par x', x'', ces racines pouvant être réelles et inégales, réelles et égales, ou imaginaires. Nous examinerons successivement ces trois cas.

Premier cas. — Quand les racines x', x'', sont réelles et inégales, en les supposant, pour fixer les idées, toutes deux positives, et en regardant x'' comme la plus grande, on prend $AP' = x'$, $AP'' = x''$, on tire des parallèles P′K′, P″K″, à l'axe des Y; les intersections K′, K″, de ces droites avec H′H sont les points où la courbe rencontre ce diamètre.

En désignant toujours par Y l'ordonnée comptée à partir du diamètre H′H, on a

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{-\left(x^2 - \frac{2p}{\delta^2}x - \frac{q}{\delta^2}\right)}.$$

Comme

$$x^2 - \frac{2p}{\delta^2}x - \frac{q}{\delta^2} = (x - x')(x - x''),$$

l'expression précédente peut être remplacée par

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{(x - x')(x'' - x)}.$$

Cela posé, de $x = 0$ à $x = x'$, le facteur $x - x'$ est négatif, et $x'' - x$ positif; par suite, les valeurs de Y sont imaginaires : donc, il n'existe aucun point de la courbe entre l'axe des Y et la parallèle P′K′ à cet axe, menée à la distance x' comptée sur l'axe des x.

De P′ à P″, les valeurs de x étant comprises entre x' et x'', les facteurs $x - x'$, $x'' - x$ sont positifs, et les valeurs de Y sont réelles. Chaque valeur attribuée à x, entre ces deux limites, donne deux points de la courbe.

Au delà de P″, les facteurs $x - x'$, $x'' - x$ étant l'un positif, l'autre négatif, les valeurs de Y sont constamment imaginaires. La courbe n'a donc aucun point au delà de la parallèle P″K″ à l'axe des y.

Pour toute valeur négative de x, les facteurs $(x - x')$, $(x'' - x)$ ont des signes contraires, et les valeurs de Y sont imaginaires. La courbe n'a donc aucun point du côté des abscisses négatives.

Cette courbe est placée entre les parallèles P′K′, P″K″; et comme les valeurs de x, pour lesquelles l'ordonnée comptée à partir du diamètre est réelle, ne peuvent rendre cette ordonnée infinie, il en résulte que la courbe est aussi limitée de part et d'autre du diamètre.

Pour déterminer les limites de l'ellipse parallèlement au diamètre, nous ferons observer que la somme des facteurs variables placés sous le radical est égale à une quantité donnée $x'' - x'$. Le maximum du produit $(x - x')$ $(x'' - x)$

est alors $\left(\frac{x''-x'}{2}\right)^2$, ce qui donne $\frac{\delta.(x''-x')}{4A}$ pour le maximum de Y. On aura la valeur de x, à laquelle correspond ce maximum, en posant

$$x-x'=x''-x;$$

d'où

$$x=\frac{x''+x'}{2}.$$

Cette valeur de x est évidemment l'abscisse du point N, milieu de P′P″. Après avoir mené par ce point une parallèle indéfinie à l'axe des y, on prendra, à partir du point O de rencontre de cette parallèle avec le diamètre, des longueurs OG, OG′, égales à $\frac{\delta(x''-x')}{4A}$, et on aura ainsi, en G et G′, les points les plus éloignés du diamètre. Si l'on conduit à cette dernière ligne les deux parallèles DE, D′E′. la courbe sera renfermée dans le parallélogramme DED′E′

On peut encore obtenir d'une autre manière le maximum de l'ordonnée comptée à partir du diamètre.

En effet, en ajoutant et retranchant, sous le radical, $\frac{p^2}{\delta^4}$, on peut écrire

$$Y=\frac{\delta}{2A}\sqrt{\left(\frac{p^2}{\delta^4}+\frac{q}{\delta^2}\right)-\left(x-\frac{p}{\delta^2}\right)^2}.$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que le maximum de Y correspond à

$$x=\frac{p}{\delta^2}.$$

Cette dernière valeur est égale à $\frac{x'+x''}{2}$, et donne le point N trouvé précédemment.

Si l'on prend, de chaque côté du point N,

$$NQ'=NQ''=r,$$

on aura

$$AQ' = AN - NQ' = \frac{p}{\delta^2} - r,$$

$$AQ'' = AN + NQ'' = \frac{p}{\delta^2} + r.$$

Ces abscisses, mises à la place de x sous le radical, conduisent à la même valeur pour Y. Donc, pour ces abscisses, les ordonnées RM, RI, R'M', R'I', comptées à partir du diamètre, sont égales entre elles. On conclut aisément de cette égalité, que les triangles IRO, OR'M' sont égaux, et, par suite, que la ligne IOM' est une droite divisée en deux parties égales au point O. La distance r étant arbitraire, il en résulte que le point O divise en deux parties égales toutes les droites qui passent par ce point, et qui sont terminées à la courbe. A cause de cette propriété, le point O est nommé *centre*.

Si l'on détermine d'abord le diamètre, et si l'on donne des valeurs numériques aux quantités δ, A, x', x'', en cherchant des points suffisamment rapprochés et en les joignant par un trait continu, on reconnaîtra que la courbe a la forme indiquée (*fig.* 51).

On peut voir que la courbe est concave vers le diamètre; car s'il en était autrement, une droite pourrait la rencontrer en plus de deux points.

Deuxième cas. — Lorsque les racines x', x'', sont égales, on trouve

$$Y = \pm \frac{\delta(x - x')\sqrt{-1}}{2A},$$

et la seule valeur de x, qui rend Y réelle, étant x', l'ellipse se réduit à un point dont les coordonnées sont

$$x = x', \quad y = ax' + b.$$

On peut reconnaître facilement que, dans le cas que nous

traitons, le premier membre de l'équation proposée est la somme de deux carrés.

En effet, on a

$$y = -\frac{Bx}{2A} - \frac{D}{2A} \pm \frac{\delta(x - x')\sqrt{-1}}{2A}.$$

Multipliant par $2A$, et faisant passer dans le premier membre les termes indépendants du radical, on trouve

$$2Ay + Bx + D = \pm\delta(x - x')\sqrt{-1};$$

d'où

$$(2Ay + Bx + D)^2 + \delta^2(x - x')^2 = 0.$$

Troisième cas. — Enfin, quand les racines x', x'', sont imaginaires, le trinôme $-\delta^2 x^2 + 2px + q$ conserve le signe de son premier terme, quelque valeur réelle que l'on donne à x; on ne trouve donc que des valeurs imaginaires pour Y. Alors il n'existe aucun point dont les coordonnées vérifient l'équation (1). Dans ce cas, on dit que cette équation n'admet aucune solution réelle, ou bien qu'elle représente une ellipse imaginaire.

Le premier membre de l'équation est alors la somme de trois carrés dont l'un est indépendant de x et de y.

Pour le prouver, nous ferons remarquer que l'équation

$$x^2 - \frac{2p}{\delta^2}x - \frac{q}{\delta^2} = 0$$

ayant ses racines imaginaires, on a

$$-\frac{q}{\delta^2} = \frac{p^2}{\delta^4} + K^2,$$

ce qui donne

$$-\delta^2\left(x^2 - \frac{2p}{\delta^2}x - \frac{q}{\delta^2}\right) = -\delta^2\left[\left(x - \frac{p}{\delta^2}\right)^2 + K^2\right];$$

par suite, l'équation

$$y = -\frac{Bx}{2A} - \frac{D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{-\delta^2 x^2 + 2px + q}$$

devient

$$(2Ay + Bx + D)^2 + \delta^2\left(x - \frac{p}{\delta^2}\right)^2 + \delta^2 K^2 = 0.$$

Le cercle est un cas particulier de l'ellipse, puisque cette première courbe est fermée et que son équation est du second degré.

Le cercle, le point et la courbe imaginaire sont ce qu'on nomme ordinairement les *variétés* de l'ellipse.

Discussion de l'hyperbole.

$$B^2 - 4AC > 0.$$

85. La valeur générale de y est

$$y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{nx^2 + 2px + q}.$$

Le coefficient n étant positif, nous le remplacerons par δ^2, et nous aurons alors

$$y = ax + b \pm \frac{\delta}{2A}\sqrt{x^2 + \frac{2p}{\delta^2}x + \frac{q}{\delta^2}},$$

et

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{x^2 + \frac{2px}{\delta^2} + \frac{q}{\delta^2}}.$$

En posant l'équation

$$x^2 + \frac{2p}{\delta^2}x + \frac{q}{\delta^2} = 0,$$

et en désignant, comme précédemment, les racines par x', x'', il y aura encore trois cas à distinguer.

Premier cas. — Lorsque les racines x', x'', sont réelles et inégales, on a

$$\text{(A)} \qquad Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{(x - x')(x - x'')}.$$

Les abscisses des points où la courbe rencontre le dia-

mètre HH' (*fig.* 52) dont l'équation est $y = ax + b$, seront x', x''.

Pour fixer les idées, regardons ces racines comme positives, x'' étant la plus grande des deux.

Nous prendrons $AP' = x'$, $AP'' = x''$, et par les points P', P'' nous mènerons à l'axe des y les parallèles $P'K'$, $P''K''$, qui détermineront les points d'intersection K', K'' de la courbe avec le diamètre.

De A en P', les deux facteurs $x - x'$, $x - x''$, sont négatifs, et, par suite, Y est réelle. En écrivant

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{(x' - x)(x'' - x)},$$

on voit que, x augmentant de zéro à x', Y diminue de

$$\frac{\delta}{2A}\sqrt{x'x''}$$

à zéro. En prenant

$$HD = HD' = \frac{\delta}{2A}\sqrt{x'x''},$$

la portion de courbe comprise entre l'axe des y et la parallèle $P'K'$ à cet axe, aura la forme $DK'D'$.

De P' à P'', les facteurs $x - x'$, $x - x''$, étant de signes contraires, Y est imaginaire. Il n'y a donc aucune partie de la courbe entre les parallèles $P'K'$, $P''K''$. Au delà de P'', les facteurs $x - x'$, $x - x''$ sont positifs, et augmentent jusqu'à l'infini. Cela détermine une branche $EK''E'$ qui s'étend à l'infini dans le sens des x positifs et qui s'écarte de plus en plus du diamètre HK''.

Du côté AX', x étant négatif, on fera $x = -z$; l'équation (A) deviendra

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{(z + x')(z + x'')}.$$

Chaque valeur positive de z déterminera deux valeurs de Y

égales et de signes contraires, et z augmentant jusqu'à l'infini, Y croîtra aussi jusqu'à l'infini. On aura alors deux arcs d'hyperbole DG, D'G', qui s'étendront à l'infini du côté des x négatifs, en s'écartant de plus en plus du diamètre HK''. La courbe aura donc la forme indiquée (*fig.* 52).

Second cas. — Quand les racines x', x'' sont réelles et égales, l'équation

$$y = ax + b \pm \frac{\delta}{2A}\sqrt{(x-x')(x-x'')}$$

donne

$$y = ax + b \pm \frac{\delta(x-x')}{2A}.$$

Ce qui détermine deux droites GG', LL' (*fig.* 53) qui se coupent sur la ligne qui a pour équation $y = ax + b$, au point dont l'abscisse est x'.

On voit facilement que le premier membre de l'équation du second degré est, dans ce cas, décomposable en deux facteurs rationnels du premier degré par rapport aux variables x, y.

Troisième cas. — Quand les racines x', x'' sont imaginaires, l'hyperbole ne rencontre pas le diamètre, et le trinôme $\delta^2 x^2 + 2px + q$ restant toujours positif, quelque valeur réelle que l'on donne à x, les deux valeurs de Y sont toujours réelles. Chaque hypothèse faite sur l'abscisse donne deux points de la courbe, situés de part et d'autre du diamètre à la même distance de cette ligne. La courbe est donc formée de deux branches indéfinies situées l'une audessus, l'autre au-dessous du diamètre (*fig.* 54).

Le minimum de l'ordonnée Y est facile à calculer. En effet, la valeur de Y peut être mise sous la forme

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{\left(x + \frac{p}{\delta^2}\right)^2 + \left(\frac{q}{\delta^2} - \frac{p^2}{\delta^4}\right)}.$$

Or, $\frac{q}{\delta^2} - \frac{p^2}{\delta^4}$ est une quantité positive, puisque les ra-

cines x', x'' sont imaginaires; on aura donc le minimum cherché en posant

$$x + \frac{p}{\delta^2} = 0, \quad \text{d'où} \quad x = -\frac{p}{\delta^2}.$$

Ce minimum a pour valeur

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{\frac{q}{\delta^2} - \frac{p^2}{\delta^4}}.$$

En prenant

$$AP = -\frac{p}{\delta^2},$$

et en menant par le point P une parallèle à l'axe des y, qui rencontre le diamètre H′ HL au point O, si l'on prend les longueurs OK′, OK″, égales à

$$\frac{\delta}{2A}\sqrt{\frac{q}{\delta^2} - \frac{p^2}{\delta^4}},$$

les points K′, K″ seront les plus rapprochés du diamètre.

Par des raisonnements semblables à ceux qui ont été faits (n° 84) pour l'ellipse, on reconnaîtrait que le point O, milieu de K′K″ (*fig.* 52, 54), est un centre.

86. On a vu (n° 83) que, A étant nul, mais B, C étant différents de zéro, la courbe devait être rangée parmi les hyperboles. Cette proposition a été établie en résolvant l'équation par rapport à x. On pourrait construire la courbe, en suivant cette marche; mais comme la variable y n'entre qu'à la première puissance, il est plus simple de résoudre l'équation par rapport à cette variable.

L'équation qu'on doit discuter est

$$Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

On en tire

$$y = \frac{-Cx^2 - Ex - F}{Bx + D}.$$

Si l'on effectue la division, on aura

$$y = cx + d + \frac{r}{Bx + D},$$

en désignant les deux premiers termes du quotient par $cx + d$, et le reste par r.

Construisons d'abord la droite $y = cx + d$; soit L'HGL cette droite (*fig.* 55).

Pour avoir les points de la courbe, il faudra porter au-dessus ou au-dessous de L'L, la valeur $\frac{r}{Bx + D}$, suivant que cette valeur sera positive ou négative, puisque, dans le premier cas, l'ordonnée de la courbe sera plus grande que celle de la droite, et qu'elle sera plus petite dans le second.

Pour simplifier la discussion, posons

$$\frac{r}{Bx + D} = V,$$

et pour fixer les idées, regardons comme positives les quantités r, B, D.

Pour $x = 0$, on a

$$V = \frac{r}{D}.$$

On prendra donc sur l'axe des y la distance

$$GK = \frac{r}{D},$$

et le point K appartiendra à la courbe.

Si l'on fait croître x positivement de 0 à ∞, V diminuera, en restant toujours positif, de $\frac{r}{D}$ à 0. A partir du point K, la courbe se rapprochera indéfiniment de la droite GL, sans jamais la rencontrer; on obtiendra alors un arc KR qui s'étendra à l'infini.

Si l'on fait $x = -z$, on aura

$$V = \frac{r}{D - Bz},$$

et il suffira de donner à z des valeurs positives pour suivre la marche de la courbe dans le cas où x est négatif.

En faisant croître z de o à $\frac{D}{B}$, le dénominateur $D - Bz$ diminuant, les valeurs de V augmentent en restant positives. Ces valeurs doivent donc toujours être portées au-dessus de L′L; on voit d'ailleurs que, lorsque $z = \frac{D}{B}$, V devient infini. Il résulte de là qu'en prenant du côté des abscisses négatives $AI = \frac{D}{B}$, et en menant par le point I la parallèle NIN′ à l'axe des y, on aura encore une droite de laquelle la courbe se rapprochera indéfiniment, sans jamais la rencontrer. L'arc d'hyperbole déterminé par les valeurs de z comprises entre o et $\frac{D}{B}$ est KR′.

Lorsque z est plus grand que $\frac{D}{B}$ et augmente, V est négatif et devient de plus en plus petit; les valeurs qu'il prend doivent alors être portées au-dessous de la droite LL′. En supposant, par exemple, $z = AF$, on obtient un point M de la courbe, la distance PM étant égale à la valeur de V. On a, pour les valeurs croissantes de z, à partir de AF, l'arc MS qui se prolonge à l'infini, en se rapprochant indéfiniment de LL′. Si l'on revient de

$$z = AF \quad \text{à} \quad z = AI = \frac{D}{B},$$

les valeurs de V sont toujours négatives, mais augmentent numériquement jusqu'à l'infini. Ces valeurs déterminent l'arc MS′ qui se rapproche indéfiniment de la droite NN′, sans jamais la rencontrer.

Les droites LL′, NN′, à cause de la propriété dont elles jouissent de se rapprocher de plus en plus de la courbe sans jamais la rencontrer, ont été nommées *asymptotes*.

Dans l'équation

$$y = \frac{-Cx^2 - Ex - F}{Bx + D},$$

nous avons supposé que la division donnait un reste; s'il en était autrement, on aurait

$$-Cx^2 - Ex - F = (Bx + D)(cx + d);$$

d'où

$$y = \frac{(Bx + D)(cx + d)}{(Bx + D)},$$

et, par suite,

$$(Bx + D)(y - cx - d) = 0.$$

Dans ce cas, l'équation proposée représenterait deux droites ayant pour équations

$$Bx + D = 0, \quad y - cx - d = 0,$$

ou

$$x = -\frac{D}{B}, \quad y = cx + d.$$

Il résulte de là que, lorsqu'on a $A = 0$, les autres termes du second degré restant dans l'équation, cette dernière représente ou une hyperbole qui a deux asymptotes dont l'une est parallèle à l'axe des y, ou un système de deux droites dont l'une est aussi parallèle à ce même axe. Si c'était le carré de x qui manquât dans l'équation, on arriverait à une conséquence tout à fait semblable.

On reconnaîtrait sans peine, en suivant la marche précédente, que si l'équation était privée du carré de l'une des variables, y par exemple, et de la première puissance de cette même variable, l'équation appartiendrait à une hyperbole qui aurait deux asymptotes, dont l'une serait l'axe

des y, ou à un système de deux droites dont l'une serait ce même axe.

87. Quand les carrés des deux variables manquent dans l'équation, auquel cas elle est de la forme

$$Bxy + Dy + Ex + F = 0;$$

en la résolvant par rapport à y, par exemple, on a

$$y = \frac{-Ex - F}{Bx + D} = d + \frac{r}{Bx + D},$$

d étant la première partie du quotient, qui doit être indépendante de x, et r le reste.

En raisonnant comme précédemment, on reconnaîtra sans peine que si la division donne un reste, l'équation représente une hyperbole qui a deux asymptotes parallèles aux axes, et que si le reste est nul, on a deux droites respectivement parallèles à ces mêmes axes.

Asymptotes de l'hyperbole en général.

88. On appelle *asymptote* d'une courbe, une ligne dont cette courbe se rapproche indéfiniment, et autant qu'on le veut, à partir d'un de ses points, sans jamais la rencontrer, à quelque distance qu'on les suppose prolongées l'une et l'autre.

Nous considérerons particulièrement les asymptotes rectilignes.

La méthode donnée par M. *Cauchy* pour déterminer les asymptotes rectilignes est une conséquence de leur définition.

Soient KR (*fig.* 55) une branche de courbe qui se prolonge à l'infini, et GL une asymptote non parallèle à l'axe des y.

L'équation de cette asymptote sera de la forme

$$y = cx + d,$$

les coefficients c et d ayant des valeurs finies. En supposant l'équation de la courbe résolue par rapport à y, on aura

$$y = f(x),$$

l'expression $f(x)$ pouvant prendre une ou plusieurs valeurs différentes pour chaque valeur attribuée à l'abscisse x. La différence $f(x) - cx - d$ entre les ordonnées des deux lignes correspondantes à une même abscisse devra, à partir d'une certaine valeur de x, diminuer continuellement pour des valeurs croissantes de x, et se réduire à zéro pour

$$x = \pm \infty.$$

Or, l'expression $f(x) - cx - d$ peut être mise sous la forme

$$x\left[\frac{f(x)}{x} - c - \frac{d}{x}\right].$$

Le premier facteur x augmentant, le second

$$\frac{f(x)}{x} - c - \frac{d}{x}$$

devra diminuer sans cesse, puisque la valeur du produit diminue. Enfin, lorsque $x = \pm \infty$, le facteur

$$\frac{f(x)}{x} - c - \frac{d}{x}$$

devra s'annuler, sans quoi le produit sera lui-même infini. D'ailleurs, à cette limite, le terme $-\frac{d}{x}$ est nul, car la valeur de d est supposée finie. Alors on a

$$\frac{f(x)}{x} - c = 0,$$

d'où

$$c = \lim. \frac{y}{x},$$

puisque

$$y = f(x).$$

Donc, la courbe considérée ne peut avoir une asymptote non parallèle à l'axe des ordonnées qu'autant que le rapport $\frac{y}{x}$ de l'ordonnée à l'abscisse, des points de l'une de ses branches tend vers une limite finie pour des valeurs de x infiniment croissantes; et si, cette condition étant remplie, l'asymptote existe réellement, le coefficient d'inclinaison de cette droite sur l'axe des abscisses doit être égal à la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{y}{x}$, et qu'il atteint seulement lorsque l'abscisse devient infinie.

En supposant la valeur de c obtenue, et en la désignant par c', la différence entre les ordonnées des deux lignes deviendra

$$f(x) - c'x - d, \quad \text{ou} \quad y - c'x - d.$$

Cette différence devant être nulle pour $x = \infty$, on en conclut

$$d = \text{lim.}\,(y - c'x).$$

On peut déterminer de cette manière plusieurs valeurs de c et d qui donnent différentes asymptotes à la courbe. On doit encore remarquer qu'en faisant $x = +\infty$, on obtient les asymptotes des branches qui sont infinies du côté des x positifs, et qu'en faisant $x = -\infty$, on obtient celles des branches qui sont infinies dans le sens des x négatifs.

Appliquons les règles précédentes à l'hyperbole.

Pour cette courbe, les valeurs générales de y sont

$$y = ax + b + \frac{1}{2A}\sqrt{\delta^2 x^2 + 2px + q};$$

$$y = ax + b - \frac{1}{2A}\sqrt{\delta^2 x^2 + 2px + q}.$$

S'il s'agit de l'hyperbole représentée (*fig.* 52), la première valeur de y détermine l'arc K″E′, ou l'arc K′G′, suivant que l'on fait croître x jusqu'à $+\infty$, ou jusqu'à $-\infty$.

Et la seconde valeur de y détermine l'arc K″E, ou l'arc K′G.

Pour avoir l'asymptote du premier arc K″E′, on considérera le rapport $\frac{y}{x}$, et l'on cherchera la valeur que prend ce rapport pour $x = +\infty$. Or,

$$\frac{y}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{1}{2A}\sqrt{\delta^2 + \frac{2p}{x} + \frac{q}{x^2}}.$$

Si l'on suppose $x = +\infty$, il vient

$$\lim.\frac{y}{x} = a + \frac{\delta}{2A} = c.$$

Connaissant la valeur de c, on cherchera la limite de $y - cx$. Dans ce cas, on a

$$y - cx = ax + b + \frac{1}{2A}\sqrt{\delta^2 x^2 + 2px + q} - \left(a + \frac{\delta}{2A}\right)x$$

$$= b + \frac{1}{2A}\left(\sqrt{\delta^2 x^2 + 2px + q} - \delta x\right).$$

Mais, en laissant la valeur de $y - cx$ sous cette forme, on ne voit pas ce qu'elle devient lorsque x augmente positivement jusqu'à l'infini, puisque les parties comprises entre parenthèses deviennent infinies en même temps. Pour lever la difficulté, nous emploierons une transformation connue. Nous écrirons

$$y - cx = b + \frac{\left(\sqrt{\delta^2 x^2 + 2px + q} - \delta x\right)\left(\sqrt{\delta^2 x^2 + 2px + q} + \delta x\right)}{2A\left(\sqrt{\delta^2 x^2 + 2px + q} + \delta x\right)}$$

$$= b + \frac{2px + q}{2A\left(\sqrt{\delta^2 x^2 + 2px + q} + \delta x\right)}$$

$$= b + \frac{2p + \frac{q}{x}}{2A\left(\sqrt{\delta^2 + \frac{2p}{x} + \frac{q}{x^2}} + \delta\right)}.$$

On voit aisément que, pour $x = +\infty$, on a

$$d = \lim.(y - cx) = b + \frac{p}{2A\delta}.$$

Remplaçant c et d par leurs valeurs dans l'équation

$$y = cx + d,$$

on aura, pour l'asymptote de l'arc K″E′,

$$y = \left(a + \frac{\delta}{2A}\right)x + b + \frac{p}{2A\delta}.$$

Si l'on veut l'asymptote de l'arc K′G, on remarquera que cet arc est déterminé par la seconde valeur de y, en y faisant croître x jusqu'à $-\infty$. On a alors

$$\frac{y}{x} = a + \frac{b}{x} - \frac{1}{2Ax}\sqrt{\delta^2 x^2 + 2px + q}.$$

Changeons x en $-z$, il faudra ensuite faire $z = +\infty$. Il vient

$$\frac{y}{x} = a - \frac{b}{z} + \frac{1}{2Az}\sqrt{\delta^2 z^2 - 2pz + q}$$

$$= a - \frac{b}{z} + \frac{1}{2A}\sqrt{\delta^2 - \frac{2p}{z} + \frac{q}{z^2}};$$

d'où l'on tire

$$c = \lim.\frac{y}{x} = a + \frac{\delta}{2A},$$

valeur trouvée précédemment.

On obtient aussi

$$y - cx = ax + b - \frac{1}{2A}\sqrt{\delta^2 x^2 + 2px + q} - \left(a + \frac{\delta}{2A}\right)x$$

$$= b - \frac{1}{2A}\left(\sqrt{\delta^2 x^2 + 2px + q} + \delta x\right)$$

$$= b - \frac{1}{2A}\left(\sqrt{\delta^2 z^2 - 2pz + q} - \delta z\right),$$

et, en exécutant une transformation semblable à celle qui a donné la valeur de d pour la première asymptote, et faisant $z = +\infty$, on trouve

$$d = \lim.(y - cx) = b + \frac{p}{2A\delta}.$$

Il résulte de là que les arcs K″E′, K′G ont la même asymptote donnée par l'équation

$$y = \left(a + \frac{\delta}{2A}\right)x + b + \frac{p}{2A\delta}.$$

On trouvera, en opérant de la même manière, que les deux arcs K″E, K′G′ ont une même asymptote dont l'équation est

$$y = \left(a - \frac{\delta}{2A}\right)x + b - \frac{p}{2A\delta}.$$

En réunissant en une seule les équations des asymptotes, on a

$$y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\left(\delta x + \frac{p}{\delta}\right).$$

Ces deux équations peuvent se déduire de l'équation de la courbe résolue par rapport à y, en ne conservant que la partie variable $\delta^2 x^2 + 2px$ placée sous le radical, complétant le carré, et extrayant la racine. Ce carré est, en effet,

$$\delta^2 x^2 + 2px + \frac{p^2}{\delta^2}.$$

Les deux asymptotes se coupent sur le diamètre

$$y = ax + b,$$

puisque les ordonnées de ces trois droites deviennent égales quand on fait

$$\delta x + \frac{p}{\delta} = 0, \quad \text{ou} \quad x = -\frac{p}{\delta^2}.$$

Cette valeur est l'abscisse du milieu de K′K″ (*fig*. 52, 54).

Pour déterminer complétement les asymptotes, on fera

$x = 0$ dans leurs équations, ce qui donnera

$$y = b \pm \frac{p}{2A\delta}.$$

On prendra alors sur l'axe des y (*fig.* 52) les distances AS, AS′, égales à $\frac{p}{2A\delta}$; on aura ainsi les asymptotes OS, OS′.

89. Pour obtenir toutes les asymptotes, il faut encore chercher celles qui sont parallèles aux ordonnées; ces asymptotes doivent correspondre aux valeurs finies de x pour lesquelles y devient infini. On peut encore remarquer qu'on aurait ces asymptotes en cherchant, par la méthode générale, toutes les asymptotes non parallèles aux abscisses. Dans ce cas, on écrirait $x = c'y + d'$, et l'on calculerait c', d', comme on a calculé c et d.

Lorsque, dans l'équation générale du second degré, le coefficient de y^2 n'est pas nul, les valeurs de y ne renfermant pas x en dénominateur, aucune valeur finie de x ne peut rendre y infinie. Alors, il n'y a aucune asymptote parallèle à l'axe des y.

Si $A = 0$, l'équation devient

$$Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0;$$

on en tire une valeur de y de la forme

$$y = rx + s + \frac{t}{Bx + D}.$$

L'application de la méthode générale donne l'asymptote

$$y = rx + s;$$

pour obtenir l'autre asymptote, on remarquera que l'hypothèse

$$x = -\frac{D}{B}$$

rend y infini. Et, par conséquent, on a une asymptote parallèle à l'axe des y.

Discussion de la parabole.

$$B^2 - 4AC = 0.$$

90. Lorsque

$$B^2 - 4AC = 0,$$

on a

$$y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{2px + q},$$

$$Y = \frac{1}{2A}\sqrt{2px + q}.$$

Quand les coefficients p et q sont positifs, chaque valeur positive de x donne pour Y une valeur réelle, et x augmentant depuis zéro jusqu'à l'infini, Y augmente depuis $\frac{1}{2A}\sqrt{q}$ jusqu'à l'infini. Prenant donc (*fig.* 56) sur l'axe des y, à partir du point B où le diamètre CBD coupe cet axe :

$$BM = BM' = \frac{1}{2A}\sqrt{q},$$

on voit qu'on aura deux arcs infinis MN, M′N′, du côté des x positifs. Pour discuter la courbe dans le sens des x négatifs, on fait $x = -z$; ce qui donne

$$Y = \frac{1}{2A}\sqrt{q - 2pz} = \frac{1}{2A}\sqrt{2p\left(\frac{q}{2p} - z\right)}.$$

On voit que, z augmentant depuis zéro jusqu'à $\frac{q}{2p}$, Y est réelle et diminue depuis $\frac{1}{2A}\sqrt{q}$ jusqu'à zéro. Mais, si z devient plus grand que $\frac{q}{2p}$, Y est imaginaire. Prenant donc

$$AE = \frac{q}{2p},$$

du côté des x négatifs, et menant EF parallèle à l'axe des ordonnées, les valeurs négatives de x donneront l'arc

M′LM, qui, de ce côté, termine la parabole. La courbe est donc composée d'une seule branche, N′LN, qui ne s'étend à l'infini que dans le sens des x positifs, et qui s'écarte de plus en plus du diamètre CBD. Cette courbe présente sa concavité au diamètre, car une droite ne peut jamais la couper en plus de deux points.

Lorsque, p étant positif, q est nul, la courbe prend la position P′BP. Si p est positif et q négatif, elle prend la position R′KR. De sorte que, p étant positif, la courbe est toujours composée d'une branche continue qui s'étend à l'infini, dans le sens des x positifs.

Quand le coefficient p est négatif, la courbe prend une position inverse, c'est-à-dire qu'elle conserve la même forme et qu'elle ne s'étend à l'infini que dans le sens des x négatifs. La *fig.* 57 indique les diverses positions NLN′, PBP′, RKR′ que prend la courbe, suivant que q est positif, nul ou négatif. On peut s'en assurer en discutant directement la valeur de Y.

Enfin, lorsque $p = 0$, on a

$$Y = \frac{1}{2A}\sqrt{q},$$

et, selon que q est positif, nul ou négatif, on obtient deux parallèles au diamètre, ou ce diamètre, ou deux droites imaginaires.

Si l'on a

$$A = 0, \quad B = 0,$$

l'équation générale devient

$$Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

qui est comprise dans le cas des paraboles (n° 83). Cette équation, résolue par rapport à x, donne

$$x = -\frac{E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{-4CDy + E^2 - 4CF}.$$

En ne prenant que la partie rationnelle $x = -\frac{E}{2C}$, on a l'équation d'un diamètre qui est parallèle à l'axe des y. Si l'on applique les raisonnements faits précédemment, en changeant seulement x en y et y en x, on déterminera la forme et la position de la courbe. Si l'on résolvait l'équation précédente par rapport à y, on aurait alors

$$y = -\frac{C}{D}\left(x^2 + \frac{E}{C}x + \frac{F}{C}\right),$$

et la discussion n'offrirait aucune difficulté.

91. Puisque la parabole s'étend à l'infini, on doit examiner si elle a des asymptotes.

On reconnaît d'abord qu'il n'y a pas d'asymptotes parallèles aux ordonnées, car pour la courbe que l'on considère, on a

$$y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{2px + q}.$$

Il est clair qu'aucune valeur finie de x ne peut rendre infinies les valeurs de y.

Pour savoir s'il existe des asymptotes non parallèles aux ordonnées, nous appliquerons la méthode générale du n° 88.

Or, on a

$$\frac{y}{x} = a + \frac{b}{x} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{\frac{2p}{x} + \frac{q}{x^2}};$$

faisant $x = \pm \infty$, il en résulte

$$\lim.\frac{y}{x} = a.$$

Cette valeur prouve que si la parabole a des asymptotes, elles sont parallèles au diamètre.

Pour avoir la valeur de d, nous écrirons

$$y - cx = b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{2px + q},$$

d'où l'on déduit

$$\lim. (y - cx) = \pm \infty.$$

Ainsi, pour avoir les asymptotes à la parabole, il faudrait mener des parallèles au diamètre, à des distances infinies; ce qui montre que la parabole n'a pas d'asymptote.

Application des discussions précédentes à des exemples numériques.

Exemples dans lesquels on a

$$B^2 - 4AC < 0.$$

92. *Premier exemple.*

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y - 3x + 7 = 0.$$

Cette équation, comparée à l'équation générale, donne

$$B^2 - 4AC = -4;$$

elle représente alors une ellipse ou l'une de ses variétés. Pour savoir quel cas a lieu, résolvons l'équation par rapport à y; nous aurons

$$y = x + 1 \pm \sqrt{-x^2 + 5x - 6}.$$

Construisons d'abord le diamètre HH′ (*fig.* 58) dont l'équation est $y = x + 1$. Égalons ensuite à zéro la quantité placée sous le radical, nous obtiendrons l'équation

$$-x^2 + 5x - 6 = 0, \quad \text{ou} \quad x^2 - 5x + 6 = 0,$$

qui donne

$$x = 3, \quad x = 2.$$

Ces racines étant inégales, l'équation représente une el-

lipse, qui rencontre le diamètre aux points dont les abscisses sont

$$x = 3, \quad x = 2.$$

Pour avoir ces points, on prendra, à partir de l'origine, sur l'axe des x,

$$AD' = 3, \quad AD = 2;$$

et l'on mènera les parallèles DE, D'E', à l'axe des y; la courbe coupera le diamètre aux points E, E'.

La quantité placée sous le radical étant le produit de $(x - 2)$ par $(3 - x)$, si l'on désigne toujours par Y l'ordonnée comptée à partir du diamètre, on aura

$$Y = \sqrt{(x-2)(3-x)}.$$

De $x = 0$ à $x = 2$, le facteur $x - 2$ est négatif, et le suivant est positif. Par conséquent, les valeurs de Y sont imaginaires; il n'existe donc aucun point de la courbe entre l'axe des y et la parallèle DE à cet axe.

De $x = 2$ à $x = 3$, les facteurs $(x - 2)$, $(3 - x)$, sont positifs, et, par suite, les valeurs de Y sont réelles. Si l'on prend des valeurs de x plus grandes que 3, il est aisé de reconnaître que les valeurs de Y sont imaginaires. On voit avec la même facilité que l'abscisse x ne peut recevoir de valeur négative. La courbe est donc renfermée entre les deux parallèles DE, D'E'.

Pour avoir les limites à partir du diamètre, on remarquera que la somme des facteurs $x - 2$, $3 - x$, étant égale à 1, le maximum de Y est

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

L'abscisse correspondante à cette ordonnée maximum s'obtiendra en posant

$$x - 2 = \frac{1}{2}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{5}{2}.$$

Le point déterminé par cette valeur est le milieu G de DD'. Il résulte de là qu'on aura les points les plus éloignés du diamètre, en prenant sur la ligne GO, parallèle aux ordonnées, les longueurs OK, OK', égales à $\frac{1}{2}$.

Si l'on mène les parallèles RKS, R'K'S', à EE', l'ellipse représentée par l'équation donnée sera comprise dans le parallélogramme RSR'S'.

Deuxième exemple.

$$y^2 - 2xy + 2x^2 + 2y - 3x - 5 = 0.$$

En résolvant l'équation par rapport à y, il vient

$$y = x - 1 \pm \sqrt{-x^2 + x + 6}.$$

Le diamètre, représenté par l'équation $y = x - 1$, est H'H (*fig.* 59). Si l'on pose

$$-x^2 + x + 6 = 0, \quad \text{ou} \quad x^2 - x - 6 = 0,$$

on en déduira $x = 3$, $x = -2$, pour les abscisses des points de rencontre E, E', de la courbe avec le diamètre. L'ordonnée comptée à partir du diamètre est

$$Y = \sqrt{(x + 2)(3 - x)}.$$

Le maximum de cette ordonnée est

$$\sqrt{\frac{5}{2} \times \frac{5}{2}} = \frac{5}{2}.$$

L'abscisse correspondante, que l'on trouve en faisant

$$x + 2 = 3 - x,$$

est $\frac{1}{2}$. On prendra donc sur la parallèle KOK' à l'axe des y, menée à la distance $\frac{1}{2}$ de l'origine, des longueurs OK, OK',

égales à $\frac{5}{2}$. Les points K, K′ seront les plus éloignés du diamètre.

En faisant $x = 0$, dans l'équation proposée, on trouve

$$y = -1 \pm \sqrt{6}.$$

Ce qui détermine les points M, M′, où la courbe coupe l'axe des y.

L'hypothèse $y = 0$ donne $x = \frac{5}{2}$ et $x = -1$; ce qui fait connaître les points d'intersection N, N′, de la courbe avec l'axe des x.

Troisième exemple.

$$y^2 + 2xy + 10x^2 - 9x = 0.$$

Cette équation, résolue par rapport à y, donne

$$y = -x \pm \sqrt{-9x^2 + 9x} = -x \pm 3\sqrt{-x^2 + x}.$$

Le diamètre $y = -x$ est la bissectrice H′H de l'angle Y′AX (*fig.* 60). En faisant

$$-x^2 + x = 0, \quad \text{ou} \quad x^2 - x = 0,$$

on trouve

$$x = 0, \quad x = 1;$$

la courbe est donc limitée, dans le sens des x, à la parallèle DE menée à l'axe des y, à la distance AD $= 1$. L'équation donne

$$Y = 3\sqrt{x(1-x)};$$

le maximum de cette ordonnée est $\frac{3}{2}$; l'abscisse correspondante est $\frac{1}{2}$. Les points les plus éloignés du diamètre sont K′, K. La courbe est tangente à l'axe des y à l'origine; elle

coupe l'axe des x aux points A, N, dont le second est à une distance de l'origine égale à $\frac{9}{10}$.

Quatrième exemple.

$$y^2 - 2xy + 4x^2 + 2y - 14x + 13 = 0.$$

On tire de là

$$y = x - 1 \pm \sqrt{-3x^2 + 12x - 12}$$
$$= x - 1 \pm \sqrt{-3(x^2 - 4x + 4)} = x - 1 \pm (x - 2)\sqrt{-3}.$$

Cette équation ne donne de valeur réelle pour y qu'en faisant $x = 2$, ce qui conduit à $y = 1$. Par conséquent, elle représente un point. Elle peut être mise sous la forme

$$(y - x + 1)^2 + 3(x - 2)^2 = 0.$$

Cinquième exemple.

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y - 2x + 6 = 0.$$

On a

$$y = x + 1 \pm \sqrt{-x^2 + 4x - 5}.$$

L'équation

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

donne

$$x = 2 \pm \sqrt{-1}.$$

Les racines étant imaginaires, on en conclut que l'équation proposée est impossible. Cette impossibilité est mise en évidence en écrivant l'équation sous la forme

$$(y - x - 1)^2 + (x - 2)^2 + 1 = 0.$$

Exemples dans lesquels on a

$$B^2 - 4AC > 0.$$

93. *Premier exemple.*

$$y^2 - 2xy - 2y + 3x + 3 = 0.$$

Cette équation donne

$$y = x + 1 \pm \sqrt{x^2 - x - 2}.$$

Le diamètre, qui a pour équation

$$y = x + 1,$$

est H'H (*fig.* 61). L'équation

$$x^2 - x - 2 = 0$$

a pour racines

$$x' = 2, \quad x'' = -1.$$

Comme ces racines sont réelles et inégales, et que le coefficient de x^2 est positif, l'équation proposée représente une hyperbole. En prenant, dans le sens des x positifs, la distance $AD = 2$, et, dans le sens des x négatifs, $AD' = -1$, les parallèles DG, D'G', menées à l'axe des y par les points D, D', détermineront les intersections E, D' de la courbe avec son diamètre.

La valeur de l'ordonnée, comptée à partir du diamètre, est

$$Y = \sqrt{(x+1)(x-2)}.$$

Cette ordonnée est imaginaire pour les valeurs positives de x moindres que 2, mais elle va continuellement en augmentant depuis $x = 2$ jusqu'à $x = \infty$, ce qui détermine la branche MEN. L'ordonnée Y est encore imaginaire quand on attribue des valeurs négatives à x, comprises entre 0 et -1. De $x = -1$ à $x = -\infty$, on trouve pour Y des valeurs réelles et croissantes, qui déterminent la branche M'D'N'. L'hypothèse $x = 0$ donne des valeurs imaginaires pour y; ce qui doit avoir lieu d'après la position de la courbe.

Pour obtenir les asymptotes de la courbe, il faut, d'après la règle donnée (nº 88), prendre le binôme $x - \frac{1}{2}$, dont

le carré reproduit les deux premiers termes de la quantité placée sous le radical, on trouve alors, pour les équations des lignes demandées,

$$y = x + 1 \pm \left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Ces droites coupent le diamètre $y = x + 1$ au point O, dont l'abscisse, AK, est $x = \frac{1}{2}$.

Pour avoir un point de chacune d'elles, on fera $x = 0$, ce qui donne

$$y = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{3}{2}.$$

On prendra donc les distances AL, AL′, égales respectivement à $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$; on joindra L, O, et L′, O, et les lignes LI, L′I′, seront les asymptotes de l'hyperbole.

Deuxième exemple.

$$y^2 - 2xy + 2y - 4x - 2 = 0.$$

On tire de là

$$y = x - 1 \pm \sqrt{x^2 + 2x + 3}.$$

Le diamètre $y = x - 1$ est HH′ (*fig.* 62). Si l'on pose

$$x^2 + 2x + 3 = 0,$$

on obtient des racines imaginaires; le coefficient de x^2 étant positif, il en résulte que la courbe ne rencontre pas le diamètre. L'ordonnée comptée à partir de ce diamètre est

$$Y = \sqrt{x^2 + 2x + 3} = \sqrt{(x + 1)^2 + 2};$$

elle est minimum pour $x = -1$, ce qui donne

$$Y = \sqrt{2}.$$

On prendra donc, dans le sens des x négatifs, la distance $AD = 1$; et après avoir mené la parallèle DO à l'axe des y,

on portera sur cette parallèle les longueurs OM, OM′, égales à $\sqrt{2}$; les points M, M′ seront les plus rapprochés du diamètre. La quantité Y augmente de $x = -1$ à $x = \pm\infty$. Pour $x = 0$, $Y = \sqrt{3}$, ce qui détermine les points E, E′, où la courbe coupe l'axe des y. D'ailleurs, à partir des points M, M′, elle va continuellement en s'éloignant du diamètre : ces deux branches sont donc LMK, L′M′K′.

Les asymptotes ont pour équations

$$y = x - 1 \pm (x + 1),$$

ou

$$y = 2x, \quad y = -2;$$

ces lignes sont TT′, RR′. On pouvait prévoir qu'une des asymptotes était parallèle à l'axe des x, puisque le carré de cette variable n'entre pas dans l'équation de la courbe.

Troisième exemple.

$$y^2 - 2xy + 4y - 2x + 3 = 0.$$

Cette équation donne

$$y = x - 2 \pm \sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - 2 \pm (x - 1);$$

d'où

$$y = 2x - 3 \quad \text{et} \quad y = -1.$$

Dans ce cas, on a un système de deux droites qui se coupent. L'équation est le produit de deux facteurs rationnels et peut s'écrire de la manière suivante :

$$(y - 2x + 3)(y + 1) = 0.$$

Sous cette forme, on reconnaît très-facilement qu'elle représente un système de deux droites.

Quatrième exemple.

$$x^2 - 2xy + 2y + 2x + 1 = 0.$$

Le carré de y manque dans l'équation; si on la résout par

rapport à cette variable, il vient

$$y = \frac{x^2 + 2x + 1}{2x - 2} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{2}{x-1},$$

en effectuant les calculs.

Construisons d'abord la droite TT′ (*fig.* 63), qui a pour équation

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2},$$

et posons

$$v = \frac{2}{x-1}.$$

Pour $x = 0$, on a

$$v = -2;$$

il faut donc prendre, au-dessous de TT′, la distance

$$\text{EM} = 2.$$

En faisant croître x de 0 à 1, les valeurs de v, toujours négatives, vont en augmentant continuellement jusqu'à l'infini. Donc, si l'on prend la distance AH = 1, et qu'on mène RR′ parallèle à l'axe des y, on aura un arc indéfini tel que ML, dont la ligne RR′ est asymptote.

Pour les valeurs positives de x plus grandes que l'unité, v, toujours positif, diminue de plus en plus, et pour $x = \infty$, on a $v = 0$. Supposons $x = 2$, et soit AD cette abscisse; la valeur correspondante de v sera 2 et déterminera le point N, situé à une distance égale à 2 de TT′. Si l'on continue de faire croître x, les valeurs de v vont en diminuant de plus en plus jusqu'à zéro. Si de $x = 2$ on revient à $x = 1$, les valeurs de v augmentent, au contraire, jusqu'à l'infini. Donc, si l'on attribue à x toutes les valeurs possibles depuis l'unité jusqu'à l'infini, on obtiendra la branche de courbe KNL′, ayant pour asymptotes les droites T′T, R′R.

Si l'on pose

$$x = -z,$$

on aura

$$v = -\frac{2}{z+1}.$$

Pour les valeurs positives de z, de 0 à l'infini, ou pour les valeurs négatives de x, les valeurs de v sont constamment négatives et décroissantes. De là résulte un arc MK′, qui a pour asymptote TT′.

Cinquième exemple.

$$4x^2 + 2xy - 3y - 4x - 3 = 0.$$

Cette équation donne

$$y = \frac{-4x^2 + 4x + 3}{2x - 3} = -2x - 1,$$

qui représente une droite. La division s'étant faite exactement, $2x - 3$ est facteur de l'équation; cette dernière est alors satisfaite en posant

$$2x - 3 = 0, \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{2},$$

ce qui détermine une seconde droite parallèle à l'axe des y.

Sixième exemple.

$$xy - y - 3x - 2 = 0.$$

On tire de là

$$y = \frac{3x + 2}{x - 1} = 3 + \frac{5}{x - 1}.$$

On reconnaît facilement que l'équation proposée représente (*fig.* 64) l'hyperbole NL, N′L′, qui a pour asymptotes les droites TT′, RR′, dont les équations sont

$$y = 3, \quad x = 1.$$

Exemples dans lesquels on a

$$B^2 - 4AC = 0.$$

94. *Premier exemple.*

$$y^2 - 4xy + 4x^2 + 2y - 6x - 2 = 0.$$

Cette équation donne

$$y = 2x - 1 \pm \sqrt{2x+3}.$$

On doit avoir une parabole, puisque la quantité placée sous le radical contient la première puissance de x, sans renfermer le carré de cette variable.

Le diamètre $y = 2x - 1$ est la droite H'H (*fig.* 65).

En faisant croître x positivement de o à l'infini, le radical, toujours réel, augmente de $\sqrt{3}$ à l'infini; ce qui détermine déjà deux arcs MN, M'N', rencontrant l'axe des x aux points L, L'.

Si l'on fait croître x négativement jusqu'à $-\frac{3}{2}$, le radical $\sqrt{2x+3}$ diminue jusqu'à zéro. Donc, en prenant

$$\text{AD} = \frac{3}{2},$$

et en menant DE parallèle à l'axe des y, le point E, où cette parallèle coupe le diamètre, sera celui où viennent se réunir les deux arcs de la parabole.

Deuxième exemple.

$$y^2 + 2xy + x^2 - 2y + x + 1 = 0.$$

On tire de là

$$y = -x + 1 \pm \sqrt{-3x}.$$

Le diamètre $y = -x + 1$ est la droite H'H (*fig.* 66). On voit facilement que la courbe a la position indiquée dans la *fig.* 66.

Troisième exemple.

$$x^2 - y - 3x + 2 = 0 \quad (\textit{fig. } 67).$$

Si l'on résout l'équation par rapport à y, il vient

$$y = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

La courbe coupe l'axe des y à la distance AL $= 2$, et

l'axe des x aux points M, N, dont les abscisses sont respectivement $x=1$, $x=2$.

La valeur de y peut être mise sous la forme

$$y=-(2-x)(x-1).$$

On voit aisément que le maximum absolu du produit $(2-x)(x-1)$ est $\frac{1}{4}$. Si donc on prend, sur l'axe des y, $AD=\frac{1}{4}$, et si l'on mène DE parallèle à l'axe des x, le point E sera le plus éloigné de la courbe au-dessous de cet axe. L'abscisse correspondante à l'ordonnée maximum est

$$x=\frac{3}{2}.$$

Les valeurs négatives de x donnent pour y des valeurs toujours positives et croissantes jusqu'à l'infini; il en est de même des valeurs positives de l'abscisse, à partir de $x=2$. La parabole représentée par l'équation est donc LEL'.

On aurait pu construire la courbe en résolvant l'équation par rapport à x.

Quatrième exemple.

$$y^2-2xy+x^2+3y-3x+2=0.$$

On a

$$y=x-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=x-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2};$$

d'où

$$y=x-1,\quad y=x-2,$$

ce qui détermine un système de deux droites parallèles. Dans ce cas, le premier membre de l'équation est le produit des facteurs

$$y-x+1,\quad y-x+2.$$

Cinquième exemple.

$$y^2 - 4xy + 4x^2 + 2y - 4x + 1 = 0.$$

Les valeurs de y données par cette équation sont toutes deux égales à $2x - 1$. Son premier membre est le carré de $(y - 2x + 1)$. Elle représente, alors, une seule droite dont l'équation est

$$y = 2x - 1.$$

Sixième exemple.

$$y^2 - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 3 = 0.$$

L'équation, résolue par rapport à y, donne

$$y = x - 1 \pm \sqrt{-2}.$$

L'équation est impossible; c'est le cas des deux droites imaginaires. L'impossibilité peut être mise en évidence en écrivant la proposée sous la forme

$$(y - x + 1)^2 + 2 = 0.$$

CHAPITRE HUITIÈME.

RÉDUCTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ A SES FORMES LES PLUS SIMPLES.

Évanouissement des termes du premier degré.

95. La résolution de l'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

a suffi pour faire connaître la forme et les variétés des lignes du second degré; mais pour reconnaître plus facilement les propriétés de ces lignes, il convient de ramener leurs équations aux formes les plus simples possibles. On y parvient en changeant le système des coordonnées. Par ce moyen, on introduit des indéterminées dont on dispose pour faire disparaître quelques-uns des termes de l'équation.

Reprenons l'équation générale

$$(A) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes, les coordonnées de la nouvelle origine étant quelconques. Nous ferons

$$x = x' + a, \quad y = y' + b,$$

a et b étant les coordonnées de la seconde origine; y', x' les nouvelles coordonnées variables.

La substitution des valeurs de x et de y dans l'équation (A) conduit à

$$(B) \quad \left\{ Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + \begin{array}{r|r|l} 2Ab & y' + 2Ca & x' + Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + F = 0. \\ +Ba & +Bb & \\ +D & +E & \end{array} \right.$$

Nous devons faire remarquer : 1°. que les termes du second degré n'ont pas changé; 2°. que les coefficients de y' et de x' s'obtiennent en prenant les dérivées par rapport à y, et par rapport à x, du premier membre de l'équation (A), et en remplaçant dans ces dérivées x et y par les coordonnées a et b de la nouvelle origine; 3°. enfin, que la partie indépendante s'obtient en mettant a et b à la place de x et de y, dans le premier membre de l'équation (A).

En revenant à l'équation (B), nous profiterons de l'indétermination de a et de b pour faire disparaître les termes du premier degré. Nous poserons alors

$$(\mathrm{D}) \qquad 2\mathrm{A}b + \mathrm{B}a + \mathrm{D} = 0, \quad 2\mathrm{C}a + \mathrm{B}b + \mathrm{E} = 0;$$

d'où nous tirerons les valeurs

$$a = \frac{2\,\mathrm{AE} - \mathrm{BD}}{\mathrm{B}^2 - 4\,\mathrm{AC}}, \quad b = \frac{2\,\mathrm{CD} - \mathrm{BE}}{\mathrm{B}^2 - 4\,\mathrm{AC}}.$$

Pour les ellipses et les hyperboles, le dénominateur $\mathrm{B}^2 - 4\,\mathrm{AC}$ étant différent de zéro, les valeurs précédentes sont finies et déterminées; d'où il résulte qu'en plaçant l'origine au point qu'elles font connaître, l'équation (B) se trouve réellement débarrassée des termes en x' et y'. Ce point est le seul qui jouisse de cette propriété, puisque les équations qui font connaître a et b n'admettent qu'une solution.

La simplification est impossible pour les paraboles, puisque $\mathrm{B}^2 - 4\,\mathrm{AC} = 0$, et qu'alors les valeurs de a et de b sont infinies, en supposant que les numérateurs ne soient pas nuls.

Si un des numérateurs $2\,\mathrm{AE} - \mathrm{BD}$, par exemple, est égal à zéro, l'autre sera aussi zéro, et, par suite, les valeurs de a, b seront indéterminées. On sait que dans ce cas les équations (D) qui ont fourni ces valeurs rentrent l'une dans l'autre, ou, ce qui revient au même, les droites que

ces équations représentent se réduisent à une seule. Il existe alors une infinité d'origines situées sur cette droite pour lesquelles on peut faire disparaître les termes du premier degré. Mais, dans ce cas, l'équation du second degré ne représente plus une courbe. En effet, en résolvant cette équation par rapport à y, comme on trouve d'abord

$$y = -\frac{Bx + D}{2A}$$

$$\pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF},$$

la double supposition

$$B^2 - 4AC = 0, \quad BD - 2AE = 0,$$

réduit ces valeurs à

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{D^2 - 4AF}.$$

Or, ici on a nécessairement deux droites parallèles, une seule droite, ou deux droites imaginaires, suivant que $D^2 - 4AF$ est positif, nul, ou négatif.

Il résulte de ce qui vient d'être dit, que les ellipses et les hyperboles sont les seules courbes du second degré, dont l'équation puisse être ramenée à la forme

$$\text{(E)} \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F' = 0.$$

Nous ferons observer que dans le cas où le seul changement d'origine ne suffit pas pour faire disparaître les termes du premier degré, cette simplification est également impossible, si l'on change à la fois l'origine et la direction des axes. En effet, supposons que cette dernière transformation ait conduit à l'équation (E). En remplaçant les nouveaux axes par d'autres qui aient la même origine et qui soient parallèles à ceux des coordonnées primitives x et y, les

valeurs que l'on devra substituer seront de la forme

$$x = mx' + ny', \quad y = m'x' + n'y',$$

et cette substitution ne reproduira aucun terme du premier degré. D'où nous conclurons que si l'on était passé d'abord de la première origine à la seconde, sans changer la direction des premiers axes, les termes du premier degré auraient disparu. On voit par là que la direction des axes n'a aucune influence sur l'évanouissement des termes du premier degré.

Évanouissement du rectangle.

96. Jusqu'à présent les coordonnées avaient une direction quelconque; dans la question qui va nous occuper, nous les supposerons rectangulaires : si elles ne l'étaient pas, on sait qu'on pourrait les rendre telles par une transformation d'axes.

Cela posé, proposons-nous de faire disparaître, si cela est possible, le rectangle des variables en prenant de nouveaux axes aussi rectangulaires. On voit qu'il est inutile de changer l'origine; car, si en la plaçant en un certain point, le rectangle s'évanouit, la simplification aurait encore lieu pour toute autre origine, puisqu'en y transportant les nouveaux axes parallèlement à eux-mêmes, les termes du second degré ne devraient pas changer, et, par suite, le rectangle des variables ne saurait reparaître. Nous prendrons donc les formules qui servent à passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes aussi rectangulaires, en y faisant

$$a = 0, \quad b = 0.$$

Nous aurons alors

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$

$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Ces valeurs, portées dans l'équation générale, donneront

$$
(\mathrm{C})\quad \left\{
\begin{array}{l|l|l|l|l|l}
A\cos^2\alpha & y'^2 + 2A\sin\alpha\cos\alpha & x'y' + A\sin^2\alpha & x'^2 + D\cos\alpha & y' + D\sin\alpha & x' + F = 0, \\
-B\sin\alpha\cos\alpha & \quad - B\sin^2\alpha & \quad + B\sin\alpha\cos\alpha & \quad - E\sin\alpha & \quad + E\cos\alpha & \\
C\sin^2\alpha & \quad + B\cos^2\alpha & \quad + C\cos^2\alpha & & & \\
 & \quad - 2C\sin\alpha\cos\alpha & & & &
\end{array}
\right.
$$

équation que l'on peut représenter par

$$(\mathrm{C}')\qquad My'^2 + Kx'y' + Nx'^2 + Ry' + Sx' + F = 0.$$

Pour que le terme qui contient le rectangle des variables disparaisse, il faut qu'en égalant son coefficient à zéro, on obtienne pour α une valeur réelle. Ce coefficient revient à

$$2(A - C)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

L'équation à résoudre est alors

$$2(A - C)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0,$$

ou

$$(A - C)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0;$$

d'où l'on tire

$$\tang 2\alpha = -\frac{B}{A - C}.$$

Une tangente pouvant passer par tous les états de grandeur entre $+\infty$ et $-\infty$, il en résulte que 2α est toujours réel. La valeur $-\frac{B}{A - C}$ de $\tang 2\alpha$ correspond à un premier arc moindre que 180 degrés que nous pouvons désigner par $2\alpha'$. Nous ferons remarquer, en outre, que α étant compris entre 0 et 360 degrés, 2α est compris entre 0, $360^\circ \times 2$. Les valeurs de 2α sont donc

$$2\alpha',\quad 2\alpha' + 180^\circ,\quad 2\alpha' + 180^\circ \times 2,\quad 2\alpha' + 180^\circ \times 3,$$

et celles de α,

$$\alpha',\quad \alpha' + 90^\circ,\quad \alpha' + 90^\circ \times 2,\quad \alpha' + 90^\circ \times 3.$$

Les deux premières déterminent deux droites perpendiculaires, et les deux dernières correspondent aux prolonge-

ments de ces droites. Il est visible que si l'on prend l'une d'elles pour l'axe des x', l'autre sera celui des y'.

Rappelons-nous que l'origine n'a pas été changée et qu'elle était, d'ailleurs, située d'une manière quelconque. On reconnaît alors qu'il existe pour chaque origine un système d'axes rectangulaires au moyen duquel on fait disparaître le rectangle $x'y'$; ce qui ramène l'équation générale à la forme

$$(\mathrm{H}) \qquad My'^2 + Nx'^2 + Ry' + Sx' + F = 0.$$

97. Nous devons examiner le cas où l'on a, en même temps,

$$B = 0 \quad \text{et} \quad A = C.$$

L'équation générale peut être ramenée à la forme

$$y^2 + x^2 + \frac{D}{A} y + \frac{E}{A} x + \frac{F}{A} = 0.$$

On reconnaît qu'elle représente un cercle; on voit aussi que tang 2α est indéterminée, ou plutôt que le coefficient du terme en $x'y'$ est nul de lui-même. On apprend par là qu'en prenant deux axes rectangulaires quelconques, on ne ramènera pas dans l'équation le rectangle des coordonnées. Et, en effet, on sait que l'équation générale du cercle, rapporté à des axes rectangulaires, ne renferme pas le rectangle xy.

98. On a vu que l'équation primitive représente une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que la quantité $B^2 - 4AC$ est négative, positive ou nulle. La quantité analogue déduite de l'équation (H) est $-4MN$; donc, les coefficients M, N doivent être de même signe dans le cas de l'ellipse, et de signes différents pour l'hyperbole. Dans le cas de la parabole, un de ces coefficients doit être nul. On reconnaît facilement qu'ils ne peuvent pas être

tous deux égaux à zéro, puisque l'équation (H) cesserait d'être du second degré.

99. D'après ce qui précède, si l'on considère les ellipses et les hyperboles, on peut faire disparaître d'abord les termes du premier degré, en changeant l'origine, et ensuite, le rectangle des variables, en prenant de nouveaux axes rectangulaires. On pourrait renverser l'ordre des transformations. On est conduit à une équation de la forme

$$(K) \qquad My^2 + Nx^2 = P,$$

x et y étant les dernières coordonnées.

Puisque, dans le cas de l'ellipse, M et N sont de même signe, en faisant

$$\frac{N}{M} = m^2, \quad \frac{P}{M} = p,$$

l'équation peut s'écrire comme il suit :

$$y^2 + m^2x^2 = p.$$

Dans le cas de l'hyperbole, M, N, étant de signes différents, on fait

$$\frac{N}{M} = -m^2, \quad \frac{P}{M} = p,$$

et l'on a

$$y^2 - m^2x^2 = p.$$

L'équation de la parabole ne peut prendre aucune de ces deux formes, puisqu'il est impossible de faire disparaître les deux termes du premier degré. Mais on peut faire évanouir le rectangle, ce qui entraîne en même temps la disparition de l'un des carrés. Par cette première transformation, on ramène l'équation des paraboles à la forme

$$(L) \qquad My^2 + Ry + Sx + F = 0,$$

en supposant, toutefois, que ce soit le carré de x qui disparaisse.

Changeons maintenant l'origine des coordonnées; pour cela, nous poserons

$$x = x' + a, \quad y = y' + b,$$

et l'équation (L) deviendra

$$My'^2 + (2Mb + R)y' + Sx' + Mb^2 + Rb + Sa + F = 0.$$

Les quantités a, b étant indéterminées, nous écrirons

$$2Mb + R = 0, \quad Mb^2 + Rb + Sa + F = 0.$$

On tire de là

$$b = -\frac{R}{2M}, \quad a = -\frac{Mb^2 + Rb + F}{S}.$$

La valeur de b est finie, puisque M est différent de zéro. Celle de a est finie aussi, pourvu que S ne soit pas nulle. Cette condition sera remplie lorsque l'équation (L) représentera une parabole. Car, si on avait $S = 0$, la première transformation réduisant l'équation à

$$My^2 + Ry + F = 0,$$

on n'aurait plus qu'un système de droites parallèles à l'axe des x, une seule droite, ou deux droites imaginaires.

On voit, par ce qui vient d'être dit, qu'en plaçant l'origine au point que déterminent les valeurs de a, b, l'équation de la parabole pourra se réduire à

$$My^2 + Sx = 0,$$

ou bien à

$$y^2 = 2px, \quad \text{en posant} \quad -\frac{S}{M} = 2p.$$

On peut conclure de ce qui précède, que par une double transformation de coordonnées et en choisissant les axes rectangulaires, les ellipses, les hyperboles et les paraboles peuvent être représentées par les équations

$$y^2 + mx^2 = p,$$
$$y^2 - mx^2 = p,$$
$$y^2 = 2px.$$

100. Il convient maintenant d'exécuter les calculs nécessaires pour ramener les équations des courbes du second ordre aux formes qui viennent d'être indiquées.

Supposons d'abord que l'équation

$$\text{(A)} \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

représente une ellipse ou une hyperbole.

Première transformation. — Pour faire disparaître les termes du premier degré, on a vu qu'il faut changer x en $x + a$, et y en $y + b$, ce qui donne

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + \left.\begin{matrix} 2Ab \\ +Ba \\ +D \end{matrix}\right| y + \left.\begin{matrix} 2Ca \\ +Bb \\ +E \end{matrix}\right| x + \left.\begin{matrix} Ab^2 \\ +Bab \\ +Ca^2 \\ +Db \\ +Ea \\ +F \end{matrix}\right\} = 0.$$

Les coordonnées de la nouvelle origine sont déterminées par les équations

$$(1) \qquad 2Ab + Ba + D = 0, \quad 2Ca + Bb + E = 0.$$

On a de plus, en désignant par F' la partie indépendante,

$$F' = Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + F.$$

Cette valeur de F' peut être simplifiée. En effet, si l'on multiplie respectivement les équations (1) par b et a, et qu'on ajoute les produits, il viendra

$$2Ab^2 + 2Bab + 2Ca^2 + Db + Ea = 0;$$

d'où

$$Ab^2 + Bab + Ca^2 = -\frac{Db + Ea}{2},$$

ce qui conduit à

$$F' = F + \frac{Db + Ea}{2}.$$

Si l'on joint à cette valeur de F' les valeurs de a et de b

(nº 95), on aura, pour les formules relatives à la première transformation :

$$a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \quad b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC},$$

$$F' = F + \frac{Db + Ea}{2}.$$

Deuxième transformation. — Dans la première transformation, les coordonnées pourraient être quelconques; mais dans la seconde, on doit les supposer rectangulaires. Si elles ne l'étaient pas, on pourrait les rendre telles, sans faire reparaître les termes du premier degré. De sorte que l'équation sur laquelle on aurait à opérer serait toujours de la forme

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F' = 0.$$

Pour faire disparaître le rectangle xy, on changera x en

$$x \cos \alpha - y \sin \alpha,$$

et y en

$$x \sin \alpha + y \cos \alpha;$$

ce qui conduira à

$$\tang 2\alpha = -\frac{B}{A - C},$$

valeur de laquelle on déduit facilement

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \tang^2 2\alpha}} = \frac{A - C}{\pm\sqrt{B^2 + (A - C)^2}},$$

$$\sin 2\alpha = \frac{\tang 2\alpha}{\pm\sqrt{1 + \tang^2 2\alpha}} = \frac{-B}{\pm\sqrt{B^2 + (A - C)^2}}.$$

Les deux valeurs égales et de signes contraires qu'on obtient pour $\sin 2\alpha$ et $\cos 2\alpha$, conviennent à la question et correspondent à deux droites perpendiculaires l'une à l'autre, dont chacune peut être prise indifféremment pour axe des x. Nous emploierons celle qui est déterminée par la valeur

positive du radical, de sorte que nous écrirons

$$\cos 2\alpha = \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}}, \quad \sin 2\alpha = \frac{-B}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}}.$$

On voit que $\sin 2\alpha$ sera, alors, de signe contraire à B.

Calculons actuellement les coefficients M, N, P, de l'équation (K) du n° 99.

En nous reportant à l'équation (C) (n° 96, page 156), nous aurons

$$M = A \cos^2\alpha - B \sin\alpha \cos\alpha + C \sin^2\alpha,$$
$$N = A \sin^2\alpha + B \sin\alpha \cos\alpha + C \cos^2\alpha.$$

D'ailleurs,

$$P = -F'.$$

Des deux premières équations on tire

$$M + N = A + C,$$
$$\begin{aligned} M - N &= (A - C)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2B \sin\alpha \cos\alpha \\ &= (A - C)\cos 2\alpha - B \sin 2\alpha \\ &= \frac{B^2 + (A - C)^2}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} = \sqrt{B^2 + (A - C)^2}. \end{aligned}$$

Prenant les valeurs de M et de N, et joignant à ces valeurs celles de $\tan 2\alpha$ et de P, on a, pour les formules relatives à la seconde transformation :

$$\operatorname{tang} 2a = -\frac{B}{A - C},$$
$$M = \frac{1}{2}\left[A + C + \sqrt{B^2 + (A - C)^2}\right],$$
$$N = \frac{1}{2}\left[A + C - \sqrt{B^2 + (A - C)^2}\right],$$
$$P = -F'.$$

101. Supposons que l'équation (A) du n° 95 (page 152) représente une parabole. Il s'agit, comme on sait, de ra-

mener cette équation à la forme

$$My^2 + Sx = 0.$$

Dans ce cas, on fait d'abord disparaître le rectangle des variables, et ensuite on change l'origine.

Première transformation. — On a vu (n° 99, page 158) qu'elle conduit à l'équation

$$My^2 + Ry + Sx + F = 0.$$

Les premiers axes sont rectangulaires; il en est de même des seconds, et la valeur de α est toujours donnée par la même formule

$$\tan 2\alpha = \frac{-B}{A - C}.$$

Les valeurs de M et de N sont déterminées par les formules trouvées précédemment.

Mais, dans la parabole, on a

$$B^2 = 4AC,$$

et, par suite,

$$\sqrt{B^2 + (A - C)^2} = \pm (A + C).$$

On peut toujours supposer A positif dans l'équation (A). Alors, d'après la relation

$$B^2 = 4AC,$$

C sera aussi positif. D'où il résulte que si l'on continue de prendre le radical positivement, on aura

$$\sqrt{B^2 + (A - C)^2} = A + C.$$

On sera conduit, en conséquence, à

$$\tan 2\alpha = \frac{-B}{A - C},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{A - C}{A + C},$$

$$\sin 2\alpha = \frac{-B}{A + C},$$

$$M = A + C,$$

$$N = 0.$$

La dernière égalité fait voir comment l'évanouissement du rectangle entraîne la disparition d'un des carrés.

Il faut, en outre, calculer R et S. Or, quand on remplace x et y respectivement par

$$x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

on obtient

$$\mathrm{R} = \mathrm{D}\cos\alpha - \mathrm{E}\sin\alpha,$$
$$\mathrm{S} = \mathrm{D}\sin\alpha + \mathrm{E}\cos\alpha.$$

Les formules

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

donnent, en remplaçant $\cos 2\alpha$ par $\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}+\mathrm{C}}$,

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}+\mathrm{C}}},$$
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}+\mathrm{C}}};$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{D}\sqrt{\mathrm{A}} - \mathrm{E}\sqrt{\mathrm{C}}}{\sqrt{\mathrm{A}+\mathrm{C}}},$$
$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{D}\sqrt{\mathrm{C}} + \mathrm{E}\sqrt{\mathrm{A}}}{\sqrt{\mathrm{A}+\mathrm{C}}}.$$

Deuxième transformation. — Il s'agit, comme nous l'avons dit, de transporter l'origine. Nous remplacerons alors x et y par $x+a$, $y+b$ dans l'équation

$$\mathrm{M}y^2 + \mathrm{R}y + \mathrm{S}x + \mathrm{F} = 0;$$

ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{M}y^2 + 2\mathrm{M}b \\ \qquad\;\; + \mathrm{R} \end{array}\right| \left. \begin{array}{r} y + \mathrm{S}x + \mathrm{M}b^2 \\ + \mathrm{R}b \\ + \mathrm{S}a \\ + \mathrm{F} \end{array} \right\} = 0.$$

Égalant à zéro le multiplicateur de y et la partie indépendante, on aura

$$2Mb + R = 0, \quad Mb^2 + Rb + Sa + F = 0;$$

d'où

$$b = -\frac{R}{2M}, \quad a = \frac{R^2 - 4MF}{4MS}.$$

Les coefficients de y^2 et de x n'ont pas changé, et l'équation simplifiée est

$$My^2 + Sx = 0.$$

Du centre et des axes.

102. On nomme *centre* d'une courbe, en général, un point tel, que toute droite menée par ce point a ses points de rencontre avec la courbe, à égales distances, deux à deux, du premier.

De cette définition résulte le théorème suivant :

Quand l'origine des coordonnées est placée au centre d'une ligne du second ordre, les termes du premier degré, par rapport aux variables, ne doivent pas entrer dans l'équation de cette ligne. Réciproquement, *lorsque les termes du premier degré n'entrent pas dans l'équation d'une ligne du second ordre, l'origine est le centre de cette ligne.*

Pour démontrer cette proposition, revenons à l'équation générale

$$(1) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

et supposons que la ligne qu'elle représente ait un centre, A (*fig.* 68). Prenons ce centre pour origine. Toute droite, MAM', passant par ce point aura pour équation

$$y = ax.$$

En portant cette valeur de y dans l'équation (1), l'équation

du second degré en x

$$(2) \qquad (Aa^2 + Ba + C)x^2 + (Da + E)x + F = 0,$$

doit avoir pour racines les abscisses des points de rencontre de la droite et de la courbe. Or, d'après la définition du centre, on a

$$AM = AM',$$

et en menant les ordonnées MP, M'P', les deux triangles AMP, AM'P' seront égaux. Donc $AP = AP'$; ce qui apprend que les racines de l'équation (2) doivent être égales et de signes contraires. On doit donc avoir

$$Da + E = 0.$$

Comme cette condition doit être remplie, indépendamment de toute valeur de a, il faut qu'on ait $D = 0$, $E = 0$, et par conséquent les termes du premier degré n'entrent pas dans l'équation (1).

Réciproquement, lorsqu'on a $D = 0$, $E = 0$, l'équation (2) qui donne les valeurs de x a ses racines égales et de signes contraires. D'où l'on peut facilement conclure que les triangles AMP, AM'P', sont égaux, et, par suite, que toute ligne MM' menée par l'origine a ses deux points de rencontre avec la courbe à égales distances du point A; c'est-à-dire que cette origine est un centre.

D'après ce qui vient d'être dit, pour qu'une courbe du second degré ait un centre, il faut qu'il existe un point tel, qu'en le prenant pour origine, et en y transportant les axes parallèlement à eux-mêmes, les termes du premier degré puissent disparaître. Or, on a vu précédemment que cette transformation est impossible pour les paraboles, et qu'elle ne peut exister que d'une seule manière pour les ellipses et les hyperboles. *Les ellipses et les hyperboles ont* donc *un centre unique*; mais *les paraboles n'en ont pas*.

103. On peut voir facilement que si une des coordon-

nées, y par exemple, n'entre qu'au carré dans l'équation d'une ligne du second ordre, l'axe auquel l'autre coordonnée, x, est parallèle, est un diamètre; en effet, pour chaque valeur de x, les valeurs de y sont égales et de signes contraires; c'est-à-dire que l'axe des abscisses divise en deux parties égales un système de cordes parallèles à l'axe des y, et, par suite, cet axe des abscisses est un diamètre.

Lorsqu'un diamètre rectiligne est perpendiculaire aux cordes qu'il divise en parties égales, ce diamètre est nommé *axe de la courbe.* La partie comprise dans la courbe est la longueur de l'axe; les points où l'axe rencontre la courbe s'appellent *sommets.*

Il résulte de là que dans les équations

$$y^2 + m^2 x^2 = p,$$

$$y^2 - m^2 x^2 = p,$$

$$y^2 = 2px,$$

de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole, l'axe des abscisses est un axe de la courbe, et que pour les deux premières seulement, l'axe des ordonnées est aussi un axe de la courbe. Car, d'après l'équation de la troisième courbe, à chaque valeur de y il ne correspond qu'une seule valeur de x.

Nous démontrerons, par la suite, que les axes dont nous venons de parler sont les seuls qui existent dans les courbes du second ordre; c'est-à-dire que l'ellipse et l'hyperbole ont chacune deux axes, et que la parabole n'en a qu'un seul.

CHAPITRE NEUVIÈME.

DE L'ELLIPSE.

104. On a vu que, par une double transformation de coordonnées, et en prenant des axes rectangulaires, l'équation de l'ellipse peut être ramenée à la forme

$$y^2 + m^2x^2 = p.$$

Il est facile de reconnaître que cette équation n'est réellement celle d'une ellipse que dans le cas où p est positif. Car, si p est négatif, l'équation est impossible, et si $p = 0$, elle ne peut plus être satisfaite que par le système

$$x = 0, \quad y = 0,$$

qui donne l'origine des coordonnées. Puisque p doit être positif, nous le remplacerons par b^2, et l'équation de l'ellipse sera

$$y^2 + m^2x^2 = b^2.$$

Sous cette forme, on voit : 1°. que l'origine est le centre de la courbe, les termes du premier degré n'entrant pas dans l'équation ; 2°. que l'axe des x et celui des y sont des diamètres et même des axes de la courbe ; chaque valeur de l'une des coordonnées donnant pour l'autre deux valeurs égales et de signes contraires, et ces mêmes coordonnées étant rectangulaires.

Pour trouver les grandeurs des axes, on fera successivement $y = 0$, $x = 0$, dans l'équation de la courbe. Or, $y = 0$ donne

$$x = \pm \frac{b}{m};$$

et $x = 0$ donne

$$y = \pm b.$$

On devra donc prendre sur l'axe des x (*fig.* 69),

$$AB = AB' = \frac{b}{m};$$

puis, sur l'axe des y,

$$AD = AD' = b.$$

Les distances BB', DD', sont les longueurs des axes.

On nomme *grand axe* ou *premier axe* la plus grande de ces distances, et *petit axe* ou *second axe* la plus petite. Les quatre points B, B', D, D', sont les *sommets* de l'ellipse. Toutefois, on donne plus particulièrement ce nom aux extrémités du grand axe.

En faisant

$$\frac{b}{m} = a, \quad \text{d'où} \quad m = \frac{b}{a},$$

et en mettant cette valeur dans l'équation

$$y^2 + m^2 x^2 = b^2,$$

on obtient

(1) $$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Comme le centre est pris pour origine, et que les axes de la courbe sont les axes de coordonnées, on dit que cette équation est celle de l'*ellipse rapportée à son centre et à ses axes*. C'est, d'ailleurs, l'équation qu'on emploie le plus souvent.

Lorsque $b = a$, l'équation devient

$$y^2 + x^2 = a^2,$$

qui représente un cercle dont le rayon est a. *Le cercle est donc une ellipse dont les axes sont égaux.*

105. Déterminons la forme de l'ellipse, au moyen de l'équation (1).

De cette équation on tire

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

On voit facilement que, x augmentant positivement depuis o jusqu'à a, les valeurs de y, toujours réelles, diminuent de b à o. Mais, x devenant plus grand que a, les valeurs de y sont imaginaires. On a ainsi, du côté AB, un arc de la forme DBD′ (*fig.* 69). Si l'on change le signe de x, les valeurs de y restent les mêmes, ce qui donne, du côté AB′, un arc DB′D′, exactement de la même forme que le précédent. On reconnaît sans peine que la concavité de la courbe est, en chacun de ses points, tournée vers le centre; car autrement une ligne droite pourrait rencontrer la courbe en plus de deux points.

Puisqu'en prenant l'abscisse quelconque AP, les deux ordonnées correspondantes sont égales, si l'on fait tourner la partie BM′B′ autour de BB′, on pourra l'appliquer sur la partie supérieure BMB′, d'où il résulte que l'axe BB′ divise la courbe en deux parties égales. La même propriété existe pour l'autre axe.

Si l'on désigne, en général, par x et y les coordonnées d'un point M pris sur la courbe, on aura

$$\text{AM} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)x^2 + b^2},$$

puisque le point M appartient à la courbe. Il est permis de supposer que les abscisses sont comptées sur le plus grand axe, et alors a est plus grand que b. En faisant croître x de o à a, la distance AM augmente de b à a. Donc, si du centre d'une ellipse on mène des droites aux différents points de la courbe, la plus grande de ces lignes sera la moitié du

premier axe, et la plus petite est la moitié du second axe. La supposition $b=a$ donne $AM=a$. Ce qui doit arriver, puisque l'ellipse devient un cercle, et que, dans cette dernière courbe, tous les rayons sont égaux.

En prenant deux points quelconques M, N, sur la courbe, on a, en vertu de l'équation (1),

$$\overline{PM}^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-\overline{AP}^2\right),\quad \overline{P'N}^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-\overline{AP'}^2\right);$$

d'où l'on tire

$$\frac{\overline{PM}^2}{\overline{P'N}^2}=\frac{a^2-\overline{AP}^2}{a^2-\overline{AP'}^2}=\frac{(a+AP)(a-AP)}{(a+AP')(a-AP')}=\frac{PB'\times PB}{P'B'\times P'B}.$$

Donc, dans l'ellipse, *les carrés des ordonnées perpendiculaires à l'un des axes sont, entre eux, comme les produits des segments correspondants, déterminés sur cet axe.*

106. Pour tout point de l'ellipse, on doit avoir

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0.$$

Si l'on prend un point extérieur E (*fig.* 69), et si on le joint au centre par la droite AE, celle-ci rencontrera la courbe en un point M dont les coordonnées seront moindres que celles du point E. Donc, pour ce dernier point, on aura

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2>0.$$

On voit de même que, pour un point intérieur E', on doit avoir

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2<0.$$

Ainsi, on a

$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0$, pour un point de l'ellipse;

$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2>0$, pour un point extérieur;

$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2<0$, pour un point intérieur.

Les réciproques de ces propositions sont évidentes.

Manières de décrire une ellipse dont on connaît les axes.

107. L'équation (1) de l'ellipse donne

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2);$$

celle d'un cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, est

$$y^2 = a^2 - x^2.$$

En prenant les ordonnées PM, PN (*fig.* 70) de l'ellipse et du cercle, correspondantes à une même abscisse AP, on aura, en les désignant respectivement par y et Y,

$$\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}.$$

D'où il résulte que, *dans l'ellipse, les ordonnées perpendiculaires au grand axe sont aux ordonnées correspondantes du cercle décrit sur ce grand axe comme diamètre, dans le rapport constant du petit axe au grand.*

Première construction. — Sur chacun des deux axes, comme diamètre (*fig.* 70), décrivons une circonférence; menons un rayon quelconque AN de la grande circonférence, rencontrant la petite au point C. Prenons l'ordonnée PN, et par le point C menons CM, parallèle au premier axe : le point M appartiendra à l'ellipse dont les axes sont $2a$ et $2b$.

En effet, on a

$$PM : PN :: AC : AN :: b : a;$$

d'où l'on tire

$$PM = \frac{b}{a} \times PN.$$

En répétant cette construction, on pourra trouver autant de points qu'on voudra de la courbe.

Nous ferons observer que, à cause de la symétrie de l'ellipse par rapport à ses axes, on peut, au moyen d'un seul rayon AN, déterminer quatre points différents, M, M', M'', M''', de la courbe.

Deuxième construction. — D'un point quelconque E (*fig.* 71) pris sur le second axe et avec un rayon égal à $a+b$, décrivons un arc de cercle qui rencontre le premier axe en C. Joignons E, C, prenons $\text{EM}=a$, et par le point M menons des parallèles MP, MG, aux deux axes.

Nous aurons

$$\text{MP} : \text{EG} :: \text{CM} : \text{ME}, \quad \text{ou} \quad y : \sqrt{a^2-x^2} :: b : a.$$

Donc,

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2};$$

par conséquent, le point M est à l'ellipse.

La droite EC pourrait être une règle dont la longueur serait $a+b$, et sur laquelle on aurait pris $\text{EM}=a$. En faisant mouvoir cette règle dans l'angle YAX, le point M décrirait un quart de l'ellipse. On aurait les autres parties de la courbe en plaçant la règle dans les autres angles formés par les axes.

Troisième construction. — Prenons un point quelconque H (*fig.* 71) sur le second axe DD'; de ce point comme centre, et avec un rayon égal à $a-b$, décrivons un arc de cercle qui coupe B'B en I; joignons H, I, et prenons $\text{IM}=b$. Le point M appartiendra à l'ellipse. En effet, si l'on mène la droite HK parallèle à BB', elle rencontrera en K le prolongement de l'ordonnée MP du point M. On aura alors

$$\text{MP} : \text{MK} :: \text{MI} : \text{MH}, \quad \text{ou} \quad y : \sqrt{a^2-x^2} :: b : a;$$

d'où

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2};$$

donc le point M appartient à l'ellipse

On peut regarder HM comme une règle d'une longueur égale à a, et sur laquelle on aurait pris $MI = b$. En faisant mouvoir la partie IH de cette règle dans l'angle XAY′, le point M décrira un quart de l'ellipse. On aurait de la même manière les trois autres quarts de la courbe.

Des foyers et des directrices.

108. En cherchant la distance d'un point du plan de l'ellipse à un point de cette courbe, et en exprimant cette distance au moyen de l'abscisse de ce second point, on obtient une expression dans laquelle cette abscisse est engagée sous des radicaux. Mais l'expression prend une forme rationnelle très-simple, lorsqu'on place dans certaines positions le point d'où l'on compte la distance. Proposons-nous de déterminer ces positions; alors la question à résoudre sera la suivante :

L'ellipse étant rapportée à son centre et à ses axes, trouver les points dont la distance à un point quelconque de cette courbe est exprimée par une fonction rationnelle de l'abscisse de ce dernier point. Ces points sont nommés *foyers* de l'ellipse.

Soient x', y', les coordonnées d'un point pris dans le plan de l'ellipse (*fig.* 72), et x, y, celles d'un point quelconque de cette courbe. En désignant par δ la distance des deux points, on aura

$$\delta^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 = x^2 - 2x'x + x'^2 + y^2 - 2y'y + y'^2.$$

Le second point étant sur l'ellipse, on a, entre x et y, la relation

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

ce qui donne

$$\delta^2 = x^2 - 2x'x + x'^2 + \frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2} - 2y' \times \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} + y'^2;$$

ou, en ordonnant par rapport à x,

$$\delta^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) x^2 - 2x'x + x'^2 + b^2 + y'^2 - 2y' \times \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Comme δ doit être une fonction rationnelle de x, il faut que δ^2 en soit une, et cette condition devant être remplie indépendamment de toute valeur attribuée à x, il est indispensable, pour que le radical disparaisse, que l'on ait $y' = 0$. On voit par là qu'un point ne peut être un foyer de l'ellipse qu'autant qu'il est situé sur le grand axe.

En supposant $y' = 0$, on a

$$\delta^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) x^2 - 2x'x + x'^2 + b^2.$$

Pour rendre rationnelle la valeur de δ, il faut disposer de l'indéterminée x', de manière que le second membre soit un carré parfait. On remplit cette condition en écrivant

$$4\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)(x'^2 + b^2) = 4x'^2,$$

équation qui conduit à

$$x' = \pm\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Ces valeurs ne sont réelles qu'autant que a est plus grand que b, ce qui indique que les abscisses doivent être comptées sur le grand axe. S'il en est ainsi, on trouvera deux foyers situés sur le grand axe de part et d'autre du centre, à une distance de ce point égale à $\sqrt{a^2 - b^2}$.

On construit les foyers en décrivant du point D, extrémité du second axe, comme centre, et avec un rayon égal à a, un arc de cercle rencontrant le premier axe aux points F et F'.

On reconnaît en effet, par cette construction, que

$$AF = AF' = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

On nomme *excentricité* de l'ellipse, la distance de chaque foyer au centre.

Déterminons, maintenant, les distances FM, F′M, des foyers à un point quelconque de la courbe. Ces distances sont nommées *rayons vecteurs*.

Pour obtenir FM, il faut dans la dernière expression de δ^2 remplacer x' par $+\sqrt{a^2-b^2}$, et pour avoir F′M, il faut mettre $-\sqrt{a^2-b^2}$ à la place de x'. Faisons, pour abréger, $\sqrt{a^2-b^2}=c$; nous aurons

$$\overline{FM}^2=\frac{c^2x^2}{a^2}-2cx+a^2,$$

$$\overline{F'M}^2=\frac{c^2x^2}{a^2}+2cx+a^2.$$

Prenant les racines carrées, il vient

$$FM=\pm\left(a-\frac{cx}{a}\right),$$

$$F'M=\pm\left(a+\frac{cx}{a}\right).$$

On ne doit admettre pour les longueurs FM, F′M, que les valeurs positives. Comme x est plus petit que a pour les différents points de l'ellipse, et que c est aussi plus petit que a, on prendra les valeurs

$$FM=a-\frac{cx}{a},\quad F'M=a+\frac{cx}{a};$$

en ajoutant ces valeurs on trouve

$$FM+F'M=2a.$$

Ce qui apprend que, *dans l'ellipse, la somme des rayons vecteurs est constante et égale au grand axe.*

109. Si l'on prend un point E (*fig.* 72) extérieur à la

courbe, la somme de ses distances aux deux foyers surpassera le grand axe.

En effet, si l'on mène les droites FE, F'E, et si l'on joint au foyer F, par la ligne MF, le point de rencontre de l'une de ces droites avec la courbe, on aura

$$\mathrm{EM} + \mathrm{EF} > \mathrm{FM};$$

ajoutant de part et d'autre F'M, on obtiendra

$$\mathrm{F'E} + \mathrm{FE} > \mathrm{FM} + \mathrm{F'M},$$

et, comme $\mathrm{FM} + \mathrm{F'M} = 2a$, il viendra

$$\mathrm{F'E} + \mathrm{FE} > 2a.$$

En prenant un point E' dans l'intérieur de l'ellipse, on a

$$\mathrm{FE'} < \mathrm{FM} + \mathrm{ME'};$$

ajoutant de part et d'autre F'E', on obtient

$$\mathrm{FE'} + \mathrm{F'E'} < \mathrm{FM} + \mathrm{F'M} \quad \text{ou} \quad \mathrm{FE'} + \mathrm{F'E'} < 2a.$$

Il résulte de là que, *suivant qu'un point est sur l'ellipse, hors de l'ellipse, ou intérieur à l'ellipse, la somme de ses distances aux deux foyers est égale au grand axe, plus grande ou moindre que cette ligne*. Les réciproques de ces propositions sont faciles à démontrer.

Au moyen de ce qui précède, on peut décrire une ellipse par points et, même, d'un mouvement continu, quand on connaît son grand axe BB' et ses foyers F, F'.

On prend un point quelconque G (*fig.* 72) entre les deux foyers; du foyer F, et avec GB', on décrit un arc de cercle; du foyer F', avec GB, on décrit un second arc qui doit rencontrer le premier. En supposant que l'intersection soit M, ce dernier point doit appartenir à la courbe, puisque

$$\mathrm{FM} + \mathrm{F'M} = 2a.$$

Il convient de décrire les arcs de cercle au-dessus et au-

CHAPITRE NEUVIÈME.

DE L'ELLIPSE.

104. On a vu que, par une double transformation de coordonnées, et en prenant des axes rectangulaires, l'équation de l'ellipse peut être ramenée à la forme

$$y^2 + m^2x^2 = p.$$

Il est facile de reconnaître que cette équation n'est réellement celle d'une ellipse que dans le cas où p est positif. Car, si p est négatif, l'équation est impossible, et si $p = 0$, elle ne peut plus être satisfaite que par le système

$$x = 0, \quad y = 0,$$

qui donne l'origine des coordonnées. Puisque p doit être positif, nous le remplacerons par b^2, et l'équation de l'ellipse sera

$$y^2 + m^2x^2 = b^2.$$

Sous cette forme, on voit : 1°. que l'origine est le centre de la courbe, les termes du premier degré n'entrant pas dans l'équation ; 2°. que l'axe des x et celui des y sont des diamètres et même des axes de la courbe ; chaque valeur de l'une des coordonnées donnant pour l'autre deux valeurs égales et de signes contraires, et ces mêmes coordonnées étant rectangulaires.

Pour trouver les grandeurs des axes, on fera successivement $y = 0$, $x = 0$, dans l'équation de la courbe. Or, $y = 0$ donne

$$x = \pm \frac{b}{m};$$

et $x = 0$ donne

$$y = \pm b.$$

On devra donc prendre sur l'axe des x (*fig.* 69),

$$AB = AB' = \frac{b}{m};$$

puis, sur l'axe des y,

$$AD = AD' = b.$$

Les distances BB', DD', sont les longueurs des axes.

On nomme *grand axe* ou *premier axe* la plus grande de ces distances, et *petit axe* ou *second axe* la plus petite. Les quatre points B, B', D, D', sont les *sommets* de l'ellipse. Toutefois, on donne plus particulièrement ce nom aux extrémités du grand axe.

En faisant

$$\frac{b}{m} = a, \quad \text{d'où} \quad m = \frac{b}{a},$$

et en mettant cette valeur dans l'équation

$$y^2 + m^2 x^2 = b^2,$$

on obtient

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2. \tag{1}$$

Comme le centre est pris pour origine, et que les axes de la courbe sont les axes de coordonnées, on dit que cette équation est celle de l'*ellipse rapportée à son centre et à ses axes*. C'est, d'ailleurs, l'équation qu'on emploie le plus souvent.

Lorsque $b = a$, l'équation devient

$$y^2 + x^2 = a^2,$$

qui représente un cercle dont le rayon est a. *Le cercle est donc une ellipse dont les axes sont égaux.*

105. Déterminons la forme de l'ellipse, au moyen de l'équation (1).

dessous du grand axe; on trouve alors deux points de la courbe, on peut même en obtenir quatre en portant successivement la même ouverture de compas à chacun des foyers.

Lorsque l'ellipse doit être très-grande, comme dans le cas où l'on doit la tracer sur le terrain, on fixe aux deux foyers les extrémités d'un cordeau dont la longueur est égale au grand axe, que l'on tient tendu au moyen d'un piquet; si l'on fait glisser le piquet de manière que le cordeau soit toujours tendu, la courbe se trouvera tracée quand ce piquet aura fait une révolution entière.

110. On a vu que dans l'ellipse la somme des rayons vecteurs menés à un même point de la courbe est constante et égale au grand axe. Cette propriété caractérise l'ellipse. Pour le prouver, nous allons chercher la courbe dans laquelle la somme des distances d'un point quelconque à deux points fixes est constante.

Soient F, F' (*fig.* 72) les deux points fixes, et M un point quelconque de la ligne demandée; désignons par $2c$ la distance FF', et par $2a$ la somme constante. En supposant, comme nous l'avons fait, que le point M appartienne à la courbe, si l'on prolonge la perpendiculaire MP, d'une longueur $PM' = PM$, les distances FM', F'M', étant respectivement égales à FM, F'M, la somme $FM' + F'M'$ sera égale à $2a$; et, par suite, le point M' appartiendra à la courbe. Cette dernière est donc symétrique par rapport à la droite FF'. On prouverait de la même manière qu'elle est symétrique relativement à la perpendiculaire AY élevée au milieu de FF'. Pour avoir, alors, une équation plus simple, nous prendrons pour axes de coordonnées les deux droites F'FX et AY.

La somme $MF' + MF$ devant être égale à $2a$, on exprime cette propriété en posant

$$MF' = a + z, \quad MF = a - z.$$

Or,

$$PF' = x + c, \quad PF = x - c;$$

les triangles rectangles MPF', MPF, donnent

$$(1) \quad (a+z)^2 = y^2 + (c+x)^2, \quad (a-z)^2 = y^2 + (c-x)^2.$$

Éliminons z entre ces équations. En retranchant la seconde de la première, il vient

$$4az = 4cx, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{cx}{a}.$$

Portant cette valeur de z dans une des équations (1), dans la première par exemple, on a

$$\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 = y^2 + (c+x)^2;$$

d'où l'on tire facilement

$$(2) \qquad a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Comme MF + MF' est plus grand que FF', a est plus grand que c, et la différence $a^2 - c^2$ est positive : l'équation (2) ne diffère de l'équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

qu'en ce que b^2 est remplacé par $a^2 - c^2$; les deux équations deviendront identiques si l'on fait $a^2 - c^2 = b^2$.

L'équation (2) représente donc une ellipse dont le grand axe est $2a$, et le petit axe $2\sqrt{a^2 - c^2}$.

111. Chaque foyer divise le grand axe en deux segments égaux à $(a + \sqrt{a^2 - b^2})$, $(a - \sqrt{a^2 - b^2})$, dont le produit est b^2, carré de la moitié du petit axe. C'est au moyen de cette propriété qu'*Apollonius* a défini les foyers.

112. Nous allons faire connaître deux droites correspondantes aux foyers de l'ellipse, et qui jouissent d'une propriété remarquable.

Dans le sens FX (*fig.* 73) des abscisses positives, prenons à partir du centre A une longueur quelconque $AG = d$, et menons la perpendiculaire HGK au grand axe.

La distance ML d'un point quelconque de l'ellipse à cette droite sera $(d - x)$. On sait que $FM = a - \frac{cx}{a}$; on aura alors

$$\frac{MF}{ML} = \frac{a^2 - cx}{a(d - x)} = \frac{a^2 - cx}{cd - cx} \times \frac{c}{a}.$$

En prenant le point G de manière que $cd = a^2$, c'est-à-dire en supposant la distance d troisième proportionnelle à c et a, on obtient

$$\frac{MF}{ML} = \frac{c}{a}.$$

Si l'on prend la distance $AG' = d = \frac{a^2}{c}$, et si l'on mène la perpendiculaire $H'G'K'$, on obtiendra

$$\frac{F'M}{ML'} = \frac{a^2 + cx}{a(d + x)} = \frac{a^2 + cx}{cd + cx} \times \frac{c}{a} = \frac{c}{a}.$$

Les deux perpendiculaires HK, H'K', sont ce qu'on nomme les *directrices* de l'ellipse.

Les propriétés caractéristiques de ces lignes peuvent, d'après ce qui précède, s'énoncer de la manière suivante : *Les distances de chaque point de l'ellipse à l'un des foyers et à la directrice voisine de ce foyer, sont entre elles dans un rapport constant qui est celui de l'excentricité au demi-grand axe.*

Ce que nous venons de dire conduit naturellement au problème suivant :

Trouver une courbe telle, que les distances de chacun de ses points à un point et à une droite donnés, soient entre elles dans le rapport constant $\frac{m}{n}$.

Soient F' et H'K' (*fig.* 73) le point et la droite donnés.

Du point F′ abaissons sur H′K′ la perpendiculaire indéfinie G′X, et partageons la distance F′G′ en deux segments F′B′, B′G′ dans le rapport de m à n. Le point B′ appartiendra à la courbe. On pourra, sans que la question perde de sa généralité, supposer

$$F'B' = m, \quad B'G' = n.$$

Choisissons le point B′ pour origine; élevons B′Y perpendiculaire à B′X, et prenons les deux droites B′Y, B′X pour axes de coordonnées.

En désignant par x et y les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe, les distances de ce point au point F′ et à la droite H′K′, seront

$$MF' = \sqrt{y^2 + (x-m)^2}, \quad ML' = x + n.$$

On aura, d'après l'énoncé,

$$\sqrt{y^2 + (x-m)^2} : x + n :: m : n.$$

D'où, en élevant les quatre termes à la seconde puissance, et en effectuant les calculs,

$$n^2y^2 + (n^2 - m^2)x^2 - 2mn(n+m)x = 0.$$

On voit par cette équation, qui est celle de la ligne demandée, que cette ligne sera une ellipse, ou une hyperbole, ou une parabole, suivant qu'on supposera $m < n$, ou $m > n$, ou $m = n$.

Soit $m < n$. Cherchons les points où la courbe rencontre l'axe des x; on sait qu'on les obtient en faisant $y = 0$. Dans l'équation de cette courbe, l'hypothèse conduit à

$$(n^2 - m^2)x^2 - 2mn(n+m)x = 0;$$

d'où l'on tire

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{2mn}{n-m}.$$

La première valeur détermine le point B′, l'autre répond

au point B. Plaçons l'origine au milieu A de la distance BB′; pour cela nous changerons x en $x+\frac{mn}{n-m}$; nous trouverons alors l'équation

$$n^2y^2+(n^2-m^2)x^2=\frac{m^2n^2(n+m)}{n-m}.$$

Puisque les coordonnées sont rectangulaires, cette équation est celle d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes. On connaît déjà la longueur du demi-axe AB′. Pour obtenir celle du second, on supposera, dans la dernière équation, $x=0$. On trouvera

$$y=\pm m\sqrt{\frac{n+m}{n-m}}.$$

En désignant par a et b les deux demi-axes, on posera

$$a=\frac{mn}{n-m},\quad b=m\sqrt{\frac{n+m}{n-m}}.$$

D'après ce qu'on a vu précédemment, si l'on représente toujours par c la distance du centre aux foyers, on doit avoir

$$c=\sqrt{a^2-b^2}.$$

Remplaçant a et b par leurs valeurs actuelles, il viendra

$$c=\sqrt{\frac{m^2n^2}{(n-m)^2}-\frac{m^2(n+m)}{n-m}}=\frac{m^2}{n-m}.$$

Or, on a

$$AF'=AB'-B'F'=\frac{mn}{n-m}-m=\frac{m^2}{n-m}.$$

Donc, le point donné F′ est un foyer de la courbe. On reconnaîtrait avec la même facilité que H′K′ est une directrice, car on a la relation

$$\overline{AB'}^2=AF'\times AG'.$$

De la tangente et de la normale.

113. On a déjà vu que la tangente en un point d'une courbe est la limite des positions que prend une sécante qui tourne autour de ce point, de manière qu'un second point de rencontre se rapprochant indéfiniment du premier, vienne se confondre avec lui. Désignons par x', y', les coordonnées du point de contact M′ (*fig.* 74); en menant une sécante par ce point et un second point quelconque M″, dont les coordonnées sont x'', y'', l'équation de la sécante sera de la forme

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

Les deux points M′, M″, étant pris sur la courbe, leurs coordonnées doivent satisfaire à son équation; on a donc

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2,$$
$$a^2 y''^2 + b^2 x''^2 = a^2 b^2.$$

En retranchant la seconde équation de la première, on obtient

$$a^2 (y'^2 - y''^2) + b^2 (x'^2 - x''^2) = 0,$$

ou

$$a^2 (y' - y'')(y' + y'') + b^2 (x' - x'')(x' + x'') = 0.$$

D'où l'on tire

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{b^2 (x' + x'')}{a^2 (y' + y'')}.$$

Il résulte de là que la valeur du coefficient angulaire de la sécante, calculé d'après la condition que les points M′, M″, se trouvent sur l'ellipse, est $-\frac{b^2 (x' + x'')}{a^2 (y' + y'')}$.

Si, maintenant, on suppose que le point M″ se confonde avec le point M′, en faisant $x'' = x'$, $y'' = y'$, la sécante

devient la tangente M′T, et le coefficient angulaire de cette dernière ligne a pour valeur $-\frac{b^2x'}{a^2y'}$; ce qui conduit à

$$y-y'=-\frac{b^2x'}{a^2y'}(x-x')$$

pour l'équation de la tangente au point donné M′.

En faisant disparaître le dénominateur a^2y', l'équation devient

$$a^2y'y+b^2x'x=a^2y'^2+b^2x'^2,$$

ou

$$a^2y'y+b^2x'x=a^2b^2,$$

puisque

$$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2.$$

Le coefficient angulaire de la tangente n'ayant qu'une valeur, on en conclut qu'on ne peut mener qu'une tangente à l'ellipse par un point pris sur la courbe.

114. On peut démontrer, comme pour le cercle, que la droite dont l'équation est

$$a^2y'y+b^2x'x=a^2b^2,$$

a tous ses points hors de l'ellipse, à l'exception du point dont les coordonnées sont x', y', en supposant, toutefois, que

$$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2.$$

En effet, si l'on retranche de la seconde équation

$$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2,$$

le double de la première, c'est-à-dire

$$2a^2y'y+2b^2x'x=2a^2b^2,$$

il vient

$$a^2(y'^2-2y'y)+b^2(x'^2-2x'x)=-a^2b^2.$$

Ajoutant, de part et d'autre, $a^2y^2 + b^2x^2$, on obtient

$$a^2(y'-y)^2 + b^2(x'-x)^2 = a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2.$$

On voit, par cette équation, que pour tout point autre que celui dont les coordonnées sont x', y', la quantité

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2$$

est plus grande que zéro; tous les points de la droite

$$a^2y'y + b^2x'x = a^2b^2,$$

à l'exception de celui qui a pour coordonnées x', y', sont donc situés hors de l'ellipse.

115. En représentant par α le coefficient angulaire de la tangente, on a la formule

$$\alpha = -\frac{b^2x'}{a^2y'}.$$

Cette formule fait voir que si, par le centre de l'ellipse, on mène une droite M'AN (*fig.* 74), qui rencontre la courbe aux points M', N, les tangentes en ces points sont parallèles; puisque, en passant du point M' au point N, les coordonnées ne font que changer de signe, et qu'alors le coefficient angulaire $-\frac{b^2x'}{a^2y'}$ reste le même.

Au moyen de la même formule, on reconnaît comment la tangente s'incline sur le premier axe B'B.

En effet, au point B, $y'=0$, $x'=a$, ce qui donne $\alpha=\infty$; dans ce cas, la tangente est perpendiculaire au premier axe. En allant du point B au point D, x' diminue et y' augmente; par suite, la valeur numérique de α devient de plus en plus petite; donc l'angle obtus formé par la tangente avec l'axe des x est de plus en plus grand. Au point D, où l'on a

$$x'=0, \quad y'=b,$$

la valeur de α est nulle. La tangente en ce point est parallèle à BB'.

116. Le point T (*fig.* 75), où la tangente rencontre l'axe des x, s'obtient en supposant $y = 0$ dans l'équation de la droite ; on trouve

$$x \text{ ou } AT = \frac{a^2}{x'}.$$

Cette valeur, étant indépendante du second axe, est constante pour toutes les ellipses, qui ont le même premier axe. Elle convient donc à la circonférence décrite sur ce premier axe comme diamètre. On déduit de cette propriété un moyen géométrique pour mener une tangente à l'ellipse en un point M donné sur la courbe. Il suffit, après avoir prolongé l'ordonnée MP du point de contact jusqu'à sa rencontre en N avec la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre, de tracer la tangente NT, de la prolonger jusqu'au point T où elle coupe l'axe des x, et de joindre ce dernier point au point donné M, par la droite MT.

La même construction s'appliquerait au second axe, car la distance At est indépendante de a.

117. D'après la définition générale donnée (n° 65, p. 93), la *sous-tangente* est la partie TP (*fig.* 75) de l'axe des x, comprise entre le pied de l'ordonnée du point de contact et le point de rencontre de la tangente avec ce même axe des x. Pour obtenir cette distance, il faut, de $AT = \frac{a^2}{x'}$, retrancher $AP = x'$; on a alors

$$TP = \frac{a^2 - x'^2}{x'}.$$

Nous devons faire observer qu'il existe une sous-tangente relative à l'axe des y, et qui a pour valeur $\frac{b^2 - y'^2}{y'}$.

La sous-tangente TP est susceptible de croître de zéro à l'infini. Pour $x' = \pm a$ elle est nulle, et pour $x' = 0$ elle devient infinie. On en peut dire autant de la sous-tangente relative à l'axe des y.

118. Joignons le centre de la courbe au point de contact par la droite AM (*fig.* 75), cette droite aura une équation de la forme

$$y = \alpha' x.$$

Le point M ayant pour coordonnées y', x', on doit avoir

$$y' = \alpha' x', \quad \text{d'où} \quad \alpha' = \frac{y'}{x'}.$$

En déterminant l'équation de la tangente, nous avons trouvé

$$\alpha = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'},$$

α désignant le coefficient angulaire de la tangente. Si l'on multiplie les deux valeurs précédentes l'une par l'autre, on obtient

$$\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

D'où l'on conclut que le produit des tangentes α, α', reste le même, quelle que soit la position du point de contact.

119. On aura la valeur de la tangente de l'angle AMT (*fig.* 75), formé par la tangente et la ligne menée du centre au point de contact, en remplaçant, dans la formule

$$\text{tang AMT} = \frac{\alpha - \alpha'}{1 + \alpha\alpha'},$$

α et α' par leurs valeurs. En effectuant le calcul et ayant égard à la relation

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2,$$

on trouve

$$\text{tang AMT} = -\frac{a^2 b^2}{(a^2 - b^2) x' y'}.$$

En prenant, ce qui est permis, les abscisses sur le grand axe, on doit regarder a comme plus grand que b. Tant que

le point de contact restera dans l'angle des coordonnées positives, la valeur précédente sera négative, et l'angle AMT sera obtus. Les hypothèses $x'=0$, $y'=0$, rendent infinie la valeur précédente; d'où il résulte qu'aux extrémités des axes et seulement en ces points, la tangente est perpendiculaire à la ligne menée du centre au point de contact. Il est facile de voir ce qui arrive lorsque les coordonnées x', y', ont des signes contraires.

120. Proposons-nous de trouver l'équation de la tangente menée par un point donné hors de l'ellipse. Désignons par x'', y'', les coordonnées de ce point, et représentons toujours par x', y', celles du point de contact.

L'équation de la tangente est, comme on l'a vu,

$$a^2y'y+b^2x'x=a^2b^2.$$

Les inconnues du problème sont les coordonnées x', y', du point de contact. Pour les obtenir, nous ferons remarquer qu'elles doivent satisfaire, en même temps, à l'équation de la tangente et à celle de la courbe : ce qui conduit, pour les déterminer, aux équations

$$a^2y''y'+b^2x''x'=a^2b^2, \tag{1}$$

$$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2. \tag{2}$$

Dans l'équation (1), prenons la valeur de y' en fonction de x', et portons-la dans l'équation (2), nous arriverons à une équation du second degré en x' qui donnera deux valeurs pour cette inconnue. Mettant ces valeurs dans l'équation (1), nous aurons les valeurs correspondantes de y'. Les calculs effectués nous conduiront aux formules

$$x'=\frac{a^2\left(b^2x''\pm y''\sqrt{a^2y''^2+b^2x''^2-a^2b^2}\right)}{a^2y''^2+b^2x''^2},$$

$$y'=\frac{b^2\left(a^2y''\mp x''\sqrt{a^2y''^2+b^2x''^2-a^2b^2}\right)}{a^2y''^2+b^2x''^2}.$$

Quand le point donné est hors de la courbe, on a

$$a^2y''^2 + b^2x''^2 - a^2b^2 > 0,$$

et, par suite, deux systèmes de valeurs réelles pour x' et y'. D'où l'on doit conclure qu'il y a deux tangentes.

Si le point donné est sur la courbe, la quantité

$$a^2y''^2 + b^2x''^2 - a^2b^2$$

est nulle; on n'a plus qu'une solution $x' = x''$, $y' = y''$. Donc, il n'y a plus qu'une seule tangente.

Enfin, lorsque le point donné est intérieur, la quantité

$$a^2y''^2 + b^2x''^2 - a^2b^2$$

est négative, les valeurs de x' et de y' sont imaginaires, et, par conséquent, on ne peut mener aucune tangente.

121. Nous allons donner de la tangente une équation indépendante des coordonnées du point de contact, et qui, dans certains cas, présente plus d'avantage que celle que nous avons fait connaître.

L'ellipse étant rapportée à son centre et à ses axes, on sait que l'équation de cette courbe est

$$(1) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0.$$

Soit $y = mx + n$ l'équation d'une droite quelconque; si l'on suppose que cette équation et la précédente existent simultanément, et qu'on élimine y entre elles, l'équation résultante

$$(2) \qquad (a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0$$

aura pour racines les abscisses des points communs aux deux lignes. En supposant égales les deux racines de cette dernière équation, on exprimera que la droite devient tangente à la courbe. La condition d'égalité des deux racines est, comme on sait,

$$a^4m^2n^2 = a^2(a^2m^2 + b^2)(n^2 - b^2).$$

On en tire

$$n^2 = a^2m^2 + b^2; \quad \text{d'où} \quad n = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2},$$

et, par suite,

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

En prenant le radical successivement avec le signe $+$, et le signe $-$, on aura les équations de deux tangentes parallèles, dont les ordonnées à l'origine sont égales et de signes contraires.

Au moyen d'un calcul semblable à celui du n° 59, page 83, on trouvera, en nommant x', y', les coordonnées du point de contact,

$$x' = -\frac{a^2m}{n}, \quad y' = \frac{b^2}{n}.$$

D'où l'on tire

$$m = -\frac{b^2x'}{a^2y'}, \quad n = \frac{b^2}{y'}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation $y = mx + n$, on trouvera

$$a^2y'y + b^2x'x = a^2b^2.$$

Ce qui est l'équation de la tangente, obtenue n° 113.

122. Cherchons, maintenant, l'équation de la normale, en supposant connues les coordonnées du point de contact.

En désignant par x', y', ces coordonnées, l'équation demandée est de la forme

$$y - y' = \alpha'(x - x').$$

Comme la normale doit être perpendiculaire à la tangente, on a

$$\alpha' = -\frac{1}{\alpha};$$

α étant le coefficient angulaire de cette dernière ligne. L'é-

quation de la normale est donc

$$y-y'=\frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x-x').$$

Pour avoir le point où la normale rencontre l'axe des x, nous ferons $y=0$ dans l'équation précédente, ce qui donnera (*fig.* 75)

$$x \text{ ou AN} = \frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot x'.$$

En supposant que B′B représente toujours le grand axe, la distance AN est de même signe que x', c'est-à-dire que le point N et le point P sont toujours d'un même côté du centre.

L'hypothèse $x'=0$ donne $\text{AN}=0$, la normale passe alors par le centre. Si l'on fait croître x' depuis o jusqu'à a, qui est son maximum, la distance AN augmentera de zéro à $\frac{a^2-b^2}{a}$. Si donc on prend

$$\text{AN}' = \frac{a^2-b^2}{a} = \frac{(a+b)(a-b)}{a},$$

le point de rencontre de la normale avec le grand axe ira en se rapprochant de N′, à mesure que le point de contact se rapprochera du sommet B. De sorte que l'on pourra prendre le point de tangence assez voisin de B pour que la distance NN′ devienne moindre que toute quantité donnée.

La sous-normale NP a pour valeur $\frac{b^2 x'}{a^2}$. On l'obtient en prenant la valeur de $(x'-x)$ correspondante à $y=0$.

123. Proposons-nous de mener une normale par un point pris hors de la courbe.

Soient x'', y'', les coordonnées du point donné; en désignant toujours par x', y', celles du point de contact, l'é-

quation de la normale sera

$$(\alpha)\qquad y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x').$$

Il faut actuellement déterminer x', y'. Pour y parvenir, nous exprimerons que la normale passe par le point donné, et que le point de tangence est sur la courbe, ce qui conduira aux deux équations :

$$(1)\qquad y'' - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x'' - x'),$$

$$(2)\qquad a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2.$$

En éliminant y' et remplaçant $a^2 - b^2$ par c^2, on obtient

$$(3)\left\{\begin{array}{l} c^4 x'^4 - 2a^2c^2x''x'^3 \\ + a^2(a^2x''^2 + b^2y''^2 - c^4)x'^2 + 2a^4c^2x''x' - a^6x''^2 = 0. \end{array}\right.$$

L'équation (3) fournira quatre valeurs de x', et la substitution de ces valeurs dans (1) déterminera les valeurs correspondantes de y'.

Pour chaque solution réelle des équations (1) et (3), l'équation (α) donnera une normale passant par le point x'', y''. Le problème peut donc admettre quatre solutions.

Le dernier terme de l'équation (3) étant toujours négatif, x' a au moins deux valeurs réelles, ce qui apprend que le problème admet au moins deux solutions réelles.

Quand le point (x'', y'') est sur l'axe des y, x'' est nulle, l'équation (3) donne deux valeurs de x' égales à zéro, ce qui détermine deux normales passant par le centre; et, selon que les autres valeurs de x' seront réelles ou imaginaires, on pourra mener quatre ou deux normales.

Lorsque le point (x'', y'') est le centre, on a

$$x'' = 0,\quad y'' = 0;$$

l'équation (3) donne

$$x' = \pm 0,\quad x' = \pm a.$$

Les valeurs correspondantes de y' déduites de l'équation (2) sont

$$y' = \pm b, \quad y' = \pm 0;$$

ce qui détermine les sommets D, D', B, B' (*fig.* 75), de l'ellipse. Et, en effet, les droites AD, AD', AB, AB', sont respectivement perpendiculaires aux tangentes à l'ellipse, menées par les points D, D', B, B'.

Pour résoudre géométriquement le problème, nous regarderons x', y', comme des variables dans les équations (1) et (2). L'équation (2) est celle de l'ellipse donnée, et l'équation (1), qui peut être ramenée à la forme

$$(4) \qquad c^2 x'y' + b^2 y'' x' - a^2 x'' y' = 0,$$

représente une hyperbole passant par le centre de l'ellipse, qui est l'origine des coordonnées.

Comme cette dernière équation est vérifiée par le système $x' = x''$, $y' = y''$, il en résulte que l'hyperbole contient le point donné.

La branche d'hyperbole qui passe par le centre rencontre toujours l'ellipse en deux points. Quant à l'autre branche, elle peut couper l'ellipse, lui être tangente, ou n'avoir aucun point commun avec elle.

Dans le premier cas, le problème a quatre solutions; dans le second, trois; et dans le dernier, deux seulement.

L'hypothèse $x'' = 0$, introduite dans l'équation de l'hyperbole, donne

$$c^2 x'y' + b^2 y'' x' = 0,$$

équation qu'on décompose en $x' = 0$, $y' = -\frac{b^2 y''}{c^2}$, et qui représente un système de deux droites, dont l'une est l'axe des y, et l'autre une parallèle à l'axe des x. La première détermine les points D et D'. Quant à la seconde, elle peut être sécante, tangente, ou tout à fait extérieure; dans le

premier cas, elle fournira deux nouvelles solutions, dans le second une seule, et enfin, dans le dernier, elle n'en donnera aucune.

En faisant à la fois $x''=0$, $y''=0$, c'est-à-dire en plaçant le point donné au centre de l'ellipse, l'équation (4) se réduit à

$$c^2 x' y' = 0.$$

Cette dernière équation est vérifiée par $x'=0$, ou $y'=0$. On trouve, alors, les deux axes coordonnés qui déterminent les quatre normales AB, AB', AD, AD'.

124. Nous allons faire connaître des relations remarquables qui existent entre la direction de la tangente et celles des rayons vecteurs menés au point de contact.

Soient MT (*fig.* 76) la tangente à l'ellipse, et FM, F'M, les rayons vecteurs menés au point de contact. En désignant toujours par x', y', les coordonnées du point de tangence M, et en représentant par α' le coefficient angulaire de FM, on aura

$$\alpha' = \frac{y'}{x'-c}.$$

Quant au coefficient angulaire de la tangente, il est

$$\alpha = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}.$$

Or, on a

$$\text{tang FMT} = \frac{\alpha - \alpha'}{1+\alpha\alpha'} = \frac{-\dfrac{b^2 x'}{a^2 y'} - \dfrac{y'}{x'-c}}{1 - \dfrac{b^2 x' y'}{a^2 y'(x'-c)}}$$

$$= \frac{-b^2 x'^2 - a^2 y'^2 + b^2 c x'}{a^2 x' y' - b^2 x' y' - a^2 c y'}.$$

En remarquant que

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2,$$

et que

$$a^2 - b^2 = c^2,$$

il vient

$$\text{tang FMT} = \frac{-a^2 b^2 + b^2 cx'}{c^2 x' y' - a^2 cy'} = \frac{b^2 (cx' - a^2)}{cy' (cx' - a^2)} = \frac{b^2}{cy'}.$$

Pour avoir la tangente de l'angle F'MT, il suffit de remplacer c par $-c$, ce qui conduit à

$$\text{tang F}'\text{MT} = -\frac{b^2}{cy'}.$$

On voit par là que les angles FMT, F'MT, sont supplémentaires. Mais F'MT a pour supplément F'MK; donc

$$\text{FMT} = \text{F}'\text{MK}.$$

En menant la normale MN, on reconnaît immédiatement qu'*elle divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs*, puisque les angles FMN, F'MN, sont les compléments des angles égaux FMT, F'MK.

On pourrait démontrer directement l'égalité des angles FMN, F'MN, par un calcul semblable à celui qui précède. Cette égalité peut être encore établie en démontrant que les segments FN, F'N, sont entre eux directement comme les rayons vecteurs FM, F'M. Les deux segments FN, F'N, s'obtiennent en cherchant la distance AN au moyen de l'équation de la normale.

125. Les propriétés précédentes fournissent une construction pour mener une tangente à l'ellipse par un point donné.

Supposons d'abord le point donné, M, sur la courbe (*fig.* 76).

On mènera les deux rayons vecteurs FM, F'M; on prolongera l'un d'eux, F'M, d'une longueur MH égale à l'autre MF, et l'on joindra le point F au point H par la droite FH. En abaissant du point M une perpendiculaire MT sur FH,

on aura la tangente. En effet, d'après cette construction, le triangle FMH est isocèle, les angles FMG, HMG, sont égaux; de plus, $HMG = F'MK$; donc $FMG = F'MK$, donc MT est tangente.

Il est d'ailleurs facile de voir que cette dernière droite a tous ses points hors de la courbe, excepté le point M. En effet, si l'on prend sur cette droite un point quelconque T, qu'on le joigne aux deux foyers par les lignes FT, F'T, en menant HT on aura

$$F'H < F'T + TH, \quad \text{d'où} \quad 2a < F'T + FT,$$

puisque

$$F'H = 2a \quad \text{et} \quad TH = FT.$$

Donc le point T est extérieur à l'ellipse.

Supposons maintenant que le point donné, T, soit extérieur à l'ellipse. Si le problème était résolu, et que MT fût la tangente, en menant par le foyer F' la ligne

$$F'MH = 2a,$$

et en joignant FH, la tangente serait perpendiculaire sur le milieu de cette droite, et les distances TH, TF, seraient égales. Le point H est donc déterminé par la rencontre de deux circonférences décrites, l'une du foyer F' avec un rayon égal à $2a$, l'autre du point donné T avec un rayon égal à TF. Ce point, H, étant obtenu, on le joindra au foyer F, et du point T on abaissera une perpendiculaire sur la ligne de jonction; cette perpendiculaire sera la tangente, et le point M, où elle rencontre F'H, sera le point de contact.

Deux circonférences pouvant se couper en deux points, il est possible que le problème admette deux solutions : c'est ce qui arrive quand le point T est extérieur à l'ellipse.

En effet, on a

$$F'T < FF' + FT,$$

et, à plus forte raison,

$$F'T < 2a + FT.$$

On a aussi

$$F'T + FT > 2a, \quad \text{ou} \quad F'T > 2a - FT.$$

La distance des centres, F'T, est donc plus petite que la somme et plus grande que la différence des rayons $2a$, FT. Par conséquent, les cercles se rencontrent en deux points, et, par suite, le problème a deux solutions.

Lorsque le point, T, est sur la courbe, les cercles décrits se touchent intérieurement, la distance des centres étant égale à la différence des rayons.

Si le point donné est intérieur, on voit facilement que la distance des centres est moindre que la différence des rayons; l'un des cercles est tout entier dans l'autre, et le problème n'admet aucune solution.

Remarque. — Puisque $FG = GH$ (*fig.* 76) et que $AF = AF'$, la droite AG est parallèle à F'H, et en est la moitié. Or, $F'H = 2a$, donc $AG = a$. Il résulte de là que *le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées des foyers d'une ellipse sur les tangentes, est une circonférence de cercle ayant pour diamètre le grand axe de la courbe.*

126. Si des foyers F, F' (*fig.* 77), on abaisse des perpendiculaires FG, F'G', sur une tangente quelconque MT, le produit de ces perpendiculaires est égal au carré de la moitié du second axe.

En effet, en menant, par le centre et le foyer F, des parallèles à la tangente MT, jusqu'à la rencontre de F'G' en L et N, on aura

$$FG = LG' - LN = LG' - LF',$$

$$F'G' = LG' + LF'.$$

Faisant le produit de FG par F'G', on obtient

$$FG \times F'G' = \overline{LG'}^2 - \overline{LF'}^2.$$

Or, dans le triangle rectangle LAG′, on a

$$\overline{LG'}^2 = \overline{AG'}^2 - \overline{AL}^2 = a^2 - \overline{AL}^2.$$

Le triangle F′AL donne

$$\overline{LF'}^2 = \overline{AF'}^2 - \overline{AL}^2 = c^2 - \overline{AL}^2,$$

d'où

$$FG \times F'G' = a^2 - c^2 = b^2.$$

Des diamètres.

127. Nous avons dit qu'on nomme *diamètre* le lieu géométrique des milieux d'une suite de cordes parallèles menées sous une direction primitive quelconque. Appliquons le calcul à cette définition.

Nous supposons toujours l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes. En menant une corde quelconque MN (*fig.* 78), son équation sera

$$y = \delta x + \beta.$$

Si l'on combine cette équation avec celle de l'ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

les valeurs de x et de y seront les coordonnées des points communs aux deux lignes. L'élimination de y entre les deux équations donne

$$x^2 + \frac{2\delta\beta a^2}{b^2 + a^2\delta^2} x + \frac{(\beta^2 - b^2) a^2}{b^2 + a^2\delta^2} = 0,$$

équation dont les racines sont les abscisses des extrémités M et N de la corde. L'abscisse de son milieu est

$$(1) \qquad x = -\frac{\delta\beta a^2}{b^2 + a^2\delta^2}.$$

En portant cette valeur dans l'équation de la corde, on

trouve pour l'ordonnée correspondante,

$$(2)\qquad y = \frac{6\,b^2}{b^2 + a^2\delta^2}.$$

Si l'on prenait une seconde corde parallèle à MN, son équation ne différerait de la première que par l'ordonnée à l'origine; d'où il résulte qu'en éliminant 6 entre les équations (1) et (2), on aura une relation qui conviendra aux coordonnées des milieux de toutes les cordes. L'élimination s'effectue en divisant l'équation (2) par (1); le résultat est

$$(3)\qquad y = -\frac{b^2}{a^2\delta}x.$$

Cette dernière équation est donc celle du *diamètre* relatif aux cordes dont le coefficient angulaire est δ, ce coefficient δ étant d'ailleurs quelconque.

On conclut de l'équation (3) que *les diamètres de l'ellipse sont des lignes droites qui passent par le centre.*

Réciproquement, toute droite menée par le centre est un diamètre, puisqu'en faisant passer δ par tous les états de grandeur, le coefficient de x, dans l'équation du diamètre, prend toutes les valeurs possibles, positives ou négatives.

128. Il existe une relation remarquable entre la direction d'un diamètre et celle des cordes qu'il divise en parties égales. Désignons toujours par $y = \delta x + 6$ l'équation d'une corde quelconque, et supposons que $y = \delta' x$ soit celle du diamètre correspondant; on a, dans ce cas,

$$\delta' = -\frac{b^2}{a^2\delta};$$

d'où l'on tire

$$(4)\qquad \delta\delta' = -\frac{b^2}{a^2}:$$

relation qui fait connaître une des tangentes δ ou δ', au moyen de l'autre.

On peut déduire plusieurs conséquences de cette relation :

1°. Si par l'extrémité L (*fig.* 78) d'un diamètre on mène une tangente, LT, à la courbe, et qu'on nomme α la tangente de l'angle LTX, on aura (n° 118, page 187)

$$\alpha\delta' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Donc

$$\alpha\delta' = \delta\delta', \quad \text{d'où} \quad \alpha = \delta.$$

Par conséquent, *les cordes qu'un diamètre divise en parties égales sont parallèles à la tangente menée par l'extrémité de ce diamètre.*

2°. Le produit $\delta\delta'$ étant constant et égal à $-\frac{b^2}{a^2}$, ne peut pas devenir égal à -1, si ce n'est dans le cercle où $b = a$. Les axes actuels des coordonnées sont donc les seuls axes de la courbe, puisqu'ils sont les seuls diamètres perpendiculaires aux cordes correspondantes.

3°. En menant un second diamètre ayant pour équation

$$y = \delta x,$$

les cordes que ce diamètre coupe en parties égales seront parallèles au premier. En effet, si l'on représente par

$$y = \delta'' x + l$$

l'équation générale de ces cordes, on doit avoir

$$\delta\delta'' = -\frac{b^2}{a^2};$$

par suite,

$$\delta\delta' = \delta\delta'', \quad \text{d'où} \quad \delta' = \delta''.$$

Il résulte de là que deux diamètres dont les équations sont

$$y = \delta x, \quad y = \delta' x,$$

et pour lesquels on a la relation (4), sont tels que chacun d'eux divise en parties égales les cordes parallèles à l'autre. A cause de cette propriété, on les nomme *diamètres conjugués*.

Des cordes supplémentaires.

129. On nomme cordes *supplémentaires*, deux droites menées des extrémités d'un diamètre quelconque à un même point de la courbe. D'après cette définition, MN, MN′ (*fig.* 78) sont des cordes supplémentaires. Ces cordes jouissent de plusieurs propriétés remarquables que nous allons faire connaître.

En désignant par x', y', les coordonnées du point N, celles du point N′ seront $-x'$, $-y'$; et si, en outre, on représente les coordonnées du point M par x, y, les équations des cordes MN, MN′, seront respectivement

$$(1) \qquad y - y' = \gamma(x - x'),$$

$$(2) \qquad y + y' = \gamma'(x + x'),$$

γ, γ', étant les tangentes trigonométriques des angles formés par ces droites avec l'axe des x.

Des équations (1) et (2) on tire

$$\gamma = \frac{y - y'}{x - x'}, \quad \gamma' = \frac{y + y'}{x + x'};$$

d'où

$$\gamma\gamma' = \frac{y^2 - y'^2}{x^2 - x'^2}.$$

Or, les points M, N, appartenant à l'ellipse, on a, entre leurs coordonnées, les relations

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2;$$

d'où

$$a^2(y^2 - y'^2) + b^2(x^2 - x'^2) = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{y^2 - y'^2}{x^2 - x'^2} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Donc,

$$(3) \qquad \gamma\gamma' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Il résulte de là que *le produit des tangentes des angles formés par deux cordes supplémentaires avec l'axe des abscisses, est égal à la quantité constante* $-\frac{b^2}{a^2}$.

Réciproquement, si la condition (3) est remplie par deux cordes qui passent aux extrémités d'un diamètre, ou par deux cordes menées par un même point de la courbe : ces cordes seront supplémentaires.

1°. Supposons qu'elles passent par les extrémités N, N', d'un diamètre. Soit G leur point de rencontre. En joignant N' au point M, où NG coupe la courbe, on aura

$$\text{tang}\, MHX . \text{tang}\, MH'X = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Or, par hypothèse, on a

$$\text{tang}\, MHX . \text{tang}\, GH''X = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Donc

$$\text{tang}\, MH'X = \text{tang}\, GH''X;$$

donc N'G et N'M se confondent.

2°. Supposons qu'on ait

$$\text{tang}\, MHX . \text{tang}\, MH'X = -\frac{b^2}{a^2};$$

les points N et N' seront sur un même diamètre.

En effet, si AN' n'est pas le prolongement de AN, soit AN'' ce prolongement; on devra avoir

$$\text{tang}\, MHX . \text{tang}\, MKX = -\frac{b^2}{a^2}:$$

d'où

$$\tang MH'X = \tang MKX.$$

Ce qui apprend que AN″ se confond avec AN′.

Il résulte de ce qui précède que :

Si l'on a deux cordes supplémentaires relatives à un premier diamètre quelconque, les parallèles à ces cordes menées par les extrémités d'un second diamètre sont aussi supplémentaires par rapport à cet autre diamètre.

130. En représentant par α et α' les tangentes des angles formés avec l'axe BB′ (*fig.* 79), par la tangente MT, et le diamètre MM′, on a trouvé (n° **118**)

$$\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Et comme (n° **129**) $\gamma\gamma' = -\frac{b^2}{a^2}$, il en résulte

$$\alpha\alpha' = \gamma\gamma'.$$

Donc, si $\alpha' = \gamma'$, on a

$$\alpha = \gamma,$$

c'est-à-dire que si l'on mène un diamètre MM′ au point de contact, en tirant, par l'extrémité d'un diamètre quelconque, la corde B′H parallèle à MM′, la corde supplémentaire BH sera parallèle à la tangente.

Il est facile, d'après cette proposition, de mener à l'ellipse une tangente en un point donné sur la courbe, ou parallèlement à une droite donnée.

Dans le premier cas, on joindra le point M de contact au centre; par l'extrémité B′ d'un diamètre BB′, on mènera la corde B′H parallèle à AM; en joignant BH, il suffira de conduire par le point donné M une parallèle à cette seconde corde.

Dans le second cas, par le point B on mènera BH parallèle à la droite donnée, on joindra B′H, et en tirant le

diamètre MM′ parallèle à B′H, les extrémités M, M′, de ce diamètre seront deux points qui répondront à la question. Il suffira de mener par ces points des parallèles à la droite donnée.

131. Quand deux diamètres ayant pour équations

$$y = \delta x, \quad y = \delta' x,$$

sont conjugués, on a entre δ, δ', la même relation qu'entre γ, γ' (n^os^ **128** et **129**). Donc, *deux diamètres parallèles à deux cordes supplémentaires sont toujours conjugués*. Réciproquement, *deux diamètres conjugués sont toujours parallèles à deux cordes supplémentaires*.

Il est facile, d'après cela, de construire deux diamètres conjugués qui forment entre eux un angle donné, quand l'ellipse est tracée et que le centre de la courbe est connu.

On tire un diamètre quelconque BAB′ (*fig.* 79) sur lequel on décrit un segment BHB′ capable de l'angle donné, et par le point H où le cercle coupe l'ellipse, on mène les cordes supplémentaires HB, HB′. En conduisant par le centre, des parallèles NN′, MM′, à ces cordes, on aura deux diamètres conjugués qui répondront à la question.

Le cercle décrit coupe l'ellipse en un second point H′ qui détermine une seconde solution du problème.

132. Dans l'ellipse, les angles des cordes supplémentaires, et, par suite, les angles des diamètres conjugués sont renfermés entre certaines limites que nous allons faire connaître.

Nous supposerons, ce qui est permis, que les cordes soient menées par les extrémités du grand axe BB′ (*fig.* 79).

Soient BH, B′H, deux cordes supplémentaires quelconques. En nommant y, x, les coordonnées du point H,

on aura

$$\operatorname{tang} \mathrm{HBX} = \frac{y}{x-a} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} \mathrm{HB'X} = \frac{y}{x+a};$$

par suite,

$$\operatorname{tang} \mathrm{B'HB} = \frac{\dfrac{y}{x-a} - \dfrac{y}{x+a}}{1 + \dfrac{y^2}{x^2-a^2}} = \frac{2ay}{y^2+x^2-a^2}.$$

Le point H étant sur la courbe, on doit avoir

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

On tire de cette équation

$$x^2 - a^2 = -\frac{a^2y^2}{b^2},$$

ce qui donne

$$(1) \qquad \operatorname{tang} \mathrm{B'HB} = -\frac{2ab^2}{(a^2-b^2)y}.$$

Puisque BB′ est le grand axe, si l'on suppose le point H, comme nous l'avons fait, situé au-dessus de cet axe, la valeur précédente sera négative, c'est-à-dire que l'angle BHB′ est obtus.

Cette valeur prise, abstraction faite de son signe, atteint son minimum quand $y = b$; dans ce cas, le sommet de l'angle est placé à l'extrémité D du second axe, et les cordes supplémentaires sont BD, B′D. L'angle obtus BDB′ est donc le plus grand, et son supplément BDK le plus petit angle que puissent faire deux cordes supplémentaires. Pour l'angle maximum, on a

$$\operatorname{tang} \mathrm{BDB'} = -\frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

On voit facilement que l'angle minimum des cordes supplémentaires de l'ellipse est égal à DBD′.

De part et d'autre du petit axe DD′, il y a toujours deux points H, H′, pour lesquels y a la même valeur. Il y a donc

deux points pour lesquels les angles BHB′, BH′B′, sont égaux. D'ailleurs, au-dessus de BB′ il n'existe que deux points qui aient la même ordonnée; donc, on ne peut avoir que deux systèmes de cordes supplémentaires formant entre elles un angle donné. Il en est de même des diamètres conjugués.

Ces deux systèmes de diamètres conjugués se réduisent à un seul : 1°. lorsque les diamètres sont parallèles aux cordes BD, B′D; 2°. lorsqu'ils sont les axes de la courbe.

Il résulte de ce qui a été dit, qu'il n'existe pas de diamètres conjugués formant entre eux un angle plus grand que BDB′, ou moindre que DBD′.

133. Puisque les axes de l'ellipse ne sont autre chose que des diamètres conjugués rectangulaires, on les construira, quand on connaîtra le centre de la courbe, en décrivant une circonférence (*fig.* 80) sur un diamètre quelconque, en joignant aux extrémités de ce diamètre un des points de rencontre de la circonférence avec l'ellipse, et en menant par le centre des parallèles aux cordes ainsi obtenues.

D'après la symétrie de l'ellipse par rapport aux axes, la circonférence décrite du point A comme centre, avec un rayon quelconque AC, doit couper la courbe en quatre points placés deux à deux symétriquement par rapport à chacun des axes, et, par suite, la figure HCH′C′ doit être un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes. On obtiendra donc les axes en menant, par le centre, des parallèles aux côtés du rectangle.

Dans les constructions précédentes, nous avons supposé connu le centre de l'ellipse; ce point est facile à déterminer quand la courbe est tracée : il suffit, en effet, de mener deux cordes parallèles GK, G′K′, de joindre leurs milieux M, M′, par une droite CC′ qu'on termine à la courbe, et de prendre le milieu A de cette droite.

La ligne CC' est un diamètre, puisqu'elle divise deux cordes parallèles en deux parties égales; on sait d'ailleurs que tous les diamètres passent par le centre, et y sont divisés en deux parties égales.

Ellipse rapportée à ses diamètres conjugués.

134. Nous avons employé jusqu'à présent l'équation

$$(1) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

qui est celle de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes. Si, en rapportant cette courbe à des axes obliques, son équation conserve cette forme, c'est-à-dire ne renferme que les carrés des variables et un terme indépendant, ces nouveaux axes seront des diamètres conjugués, puisque chaque valeur de l'une des coordonnées donnera pour l'autre deux valeurs égales et de signes contraires. On voit par là qu'on passera de l'équation (1) à l'équation aux diamètres conjugués, en cherchant les systèmes d'axes pour lesquels l'équation conserve la forme

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Prenons donc les formules qui servent à passer d'un système d'axes rectangulaires à un système d'axes obliques de même origine. Ces formules sont (n° 76, page 108)

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\alpha',$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\sin\alpha'.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient

$$(2) \quad \left\{\begin{array}{c|c|c|l} a^2\sin^2\alpha' & y'^2 + 2a^2\sin\alpha\sin\alpha' & x'y' + a^2\sin^2\alpha & x'^2 = a^2b^2. \\ +b^2\cos^2\alpha' & +2b^2\cos\alpha\cos\alpha' & +b^2\cos^2\alpha & \end{array}\right.$$

Pour que l'équation (2) prenne la forme (1), il faut et il suffit que les indéterminées α et α' satisfassent à la condition

$$(3) \qquad a^2\sin\alpha\sin\alpha' + b^2\cos\alpha\cos\alpha' = 0.$$

L'équation (3) admet une infinité de solutions réelles, car en divisant tous les termes par $\cos\alpha \cos\alpha'$, on trouve

$$(4) \qquad \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\alpha' = -\frac{b^2}{a^2};$$

une tangente pouvant passer par tous les états de grandeur depuis l'infini négatif jusqu'à l'infini positif, il en résulte que pour chaque valeur arbitraire de $\operatorname{tang}\alpha$, l'équation (4) donne une valeur réelle correspondante pour $\operatorname{tang}\alpha'$. Au moyen de $\operatorname{tang}\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha'$, on trouve $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\alpha'$, $\cos\alpha'$. Ce qui permet de calculer les coefficients des carrés des variables. L'équation est ainsi ramenée à la forme demandée

$$(5) \qquad Ay'^2 + Bx'^2 = a^2 b^2.$$

On voit, par ce qui précède, que l'ellipse a une infinité de systèmes de diamètres conjugués.

135. Quand on considère l'équation de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

$2a$ et $2b$ sont les grandeurs des axes de la courbe; désignons, par analogie, par $2a'$ et $2b'$ les longueurs de deux diamètres conjugués quelconques; nous trouverons, en faisant successivement $y' = 0$, $x' = 0$, dans l'équation (5),

$$a'^2 = \frac{a^2b^2}{B} = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha},$$

$$b'^2 = \frac{a^2b^2}{A} = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha' + b^2\cos^2\alpha'}.$$

Remplaçant A et B par leurs valeurs $\frac{a^2b^2}{b'^2}$, $\frac{a^2b^2}{a'^2}$, l'équation (5) devient

$$a'^2y'^2 + b'^2x'^2 = a'^2b'^2.$$

L'équation (4) étant celle qui lie entre elles les directions de deux cordes supplémentaires, il en résulte que *deux diamètres conjugués sont toujours parallèles à deux cordes supplémentaires;* et réciproquement, *que deux diamètres parallèles à deux cordes supplémentaires sont conjugués.*

L'équation (3) est satisfaite par les systèmes de valeurs

$$\sin\alpha = 0,\quad \cos\alpha' = 0,\quad \text{et}\quad \sin\alpha' = 0,\quad \cos\alpha = 0;$$

or, dans ces deux hypothèses, on trouve les axes de la courbe; il en devait être ainsi, puisque les axes sont des diamètres conjugués. On sait, de plus, que ce sont les seuls diamètres conjugués rectangulaires; on peut, de nouveau, s'en assurer comme il suit :

En posant $\alpha' - \alpha = 90^\circ$, on a

$$\sin\alpha' = \sin(90^\circ + \alpha) = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha,$$

$$\cos\alpha' = \cos(90^\circ + \alpha) = -\cos(90^\circ - \alpha) = -\sin\alpha.$$

Ces valeurs étant portées dans l'équation (3) donnent

$$(a^2 - b^2)\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Comme a est différent de b, on ne peut satifaire à cette dernière équation qu'en faisant

$$\sin\alpha = 0,\quad \text{ou}\quad \cos\alpha = 0;$$

hypothèses qui font retrouver les deux axes de l'ellipse.

136. Examinons s'il existe dans l'ellipse des diamètres conjugués égaux. Pour cela, égalons les valeurs de a'^2 et b'^2; nous aurons

$$a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha = a^2\sin^2\alpha' + b^2\cos^2\alpha'.$$

Remplaçant $\cos^2\alpha$ par $1 - \sin^2\alpha$, et $\cos^2\alpha'$ par $1 - \sin^2\alpha'$, cette équation devient

$$(a^2 - b^2)(\sin^2\alpha - \sin^2\alpha') = 0;$$

d'où

$$\sin^2\alpha = \sin^2\alpha', \quad \cos^2\alpha = \cos^2\alpha', \quad \operatorname{tang}^2\alpha = \operatorname{tang}^2\alpha'.$$

Cette dernière égalité conduit à

$$\operatorname{tang}\alpha' = \pm \operatorname{tang}\alpha.$$

Mais l'équation (4) exige que $\operatorname{tang}\alpha$ et $\operatorname{tang}\alpha'$ soient de signes contraires; on doit donc prendre

$$\operatorname{tang}\alpha' = -\operatorname{tang}\alpha.$$

Dans ce cas, l'équation (4) donne

$$\operatorname{tang}^2\alpha = \frac{b^2}{a^2}; \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang}\alpha = \pm\frac{b}{a}.$$

Le signe supérieur répond à l'un des diamètres, et le signe inférieur à son conjugué.

Si l'on mène les cordes BD, B'D (*fig.* 79), on aura

$$\operatorname{tang}\mathrm{DB'X} = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tang}\mathrm{DBX} = -\frac{b}{a}.$$

Il faut donc mener des diamètres parallèles à ces cordes pour avoir les diamètres conjugués égaux.

L'équation de l'ellipse rapportée à ce système de diamètres est

$$y^2 + x^2 = a'^2.$$

Cette équation est analogue à celle du cercle, rapporté à deux axes rectangulaires passant par le centre.

Nous allons démontrer deux théorèmes remarquables, relatifs aux diamètres conjugués de l'ellipse.

137. Théorème I. — *Dans l'ellipse, le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est équivalent au rectangle construit sur les axes.*

On a trouvé précédemment (n° 135)

$$a'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}, \quad b'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha' + b^2\cos^2\alpha'};$$

en multipliant les valeurs de a'^2 et b'^2 l'une par l'autre, il vient

$$a'^2b'^2 = \frac{a^4 b^4}{a^4 \sin^2\alpha \sin^2\alpha' + b^4 \cos^2\alpha \cos^2\alpha' + a^2 b^2 (\sin^2\alpha' \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\alpha')}$$

Mais, entre α et α' on a

$$a^2 \sin\alpha \sin\alpha' + b^2 \cos\alpha \cos\alpha' = 0;$$

en élevant au carré, on en déduit

$$a^4 \sin^2\alpha \sin^2\alpha' + b^4 \cos^2\alpha \cos^2\alpha' = -2a^2b^2 \sin\alpha \sin\alpha' \cos\alpha \cos\alpha'.$$

Portant cette valeur dans le produit $a'^2 b'^2$, on trouve

$$\begin{aligned} a'^2 b'^2 &= \frac{a^4 b^4}{a^2 b^2 (\sin^2\alpha' \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\alpha' - 2 \sin\alpha \sin\alpha' \cos\alpha \cos\alpha')} \\ &= \frac{a^2 b^2}{(\sin\alpha' \cos\alpha - \sin\alpha \cos\alpha')^2} = \frac{a^2 b^2}{\sin^2(\alpha' - \alpha)}. \end{aligned}$$

On conclut de là

$$a' b' \sin(\alpha' - \alpha) = ab.$$

L'angle $(\alpha' - \alpha)$ est celui que font entre eux les diamètres conjugués. Par conséquent, $a' b' \sin(\alpha' - \alpha)$ est la surface du parallélogramme construit sur les demi-diamètres conjugués; donc cette surface est constante et égale au rectangle ab des demi-axes. Ce qui démontre le théorème énoncé.

Théorème II. — *Dans l'ellipse, la somme des carrés de deux diamètres conjugués est constante et égale à la somme des carrés des deux axes.*

En reprenant les équations

(1) $$a^2 \sin\alpha \sin\alpha' + b^2 \cos\alpha \cos\alpha' = 0,$$

(2) $$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha},$$

(3) $$b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\alpha' + b^2 \cos^2\alpha'},$$

on devra éliminer entre elles les angles α et α'. Pour faire cette élimination, on porte d'abord dans l'équation (2) les valeurs de $\cos^2\alpha$ et de $\sin^2\alpha$, tirées successivement de la relation

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

et l'on a

$$\sin^2\alpha = \frac{b^2(a^2 - a'^2)}{a'^2(a^2 - b^2)}, \quad \cos^2\alpha = \frac{a^2(a'^2 - b^2)}{a'^2(a^2 - b^2)}.$$

Comme on passe de l'équation (2) à l'équation (3) en changeant a' en b', et α en α', on pourra déduire $\sin^2\alpha'$ et $\cos^2\alpha'$ des valeurs précédentes, en y changeant a' en b'; on obtient de cette manière

$$\sin^2\alpha' = \frac{b^2(a^2 - b'^2)}{b'^2(a^2 - b^2)}, \quad \cos^2\alpha' = \frac{a^2(b'^2 - b^2)}{b'^2(a^2 - b^2)}.$$

Si l'on prend maintenant l'équation (1), qu'on transporte le second terme dans l'autre membre, et qu'on élève au carré, on trouve

$$a^4\sin^2\alpha\sin^2\alpha' = b^4\cos^2\alpha\cos^2\alpha'.$$

Remplaçant les lignes trigonométriques par leurs valeurs, et faisant les simplifications qui se présentent d'elles-mêmes, on a successivement:

$$(a^2 - a'^2)(a^2 - b'^2) = (a'^2 - b^2)(b'^2 - b^2),$$

$$a^4 - a^2a'^2 - a^2b'^2 = -a'^2b^2 - b'^2b^2 + b^4,$$

$$a^4 - b^4 = a'^2(a^2 - b^2) + b'^2(a^2 - b^2),$$

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Première remarque. — Le parallélogramme ADGC (*fig.* 81) construit sur deux demi-diamètres non conjugués est plus petit que le rectangle ab des demi-axes.

Pour le démontrer, menons le demi-diamètre AD' conjugué de AD, et formons le parallélogramme ADHD'. Ce

parallélogramme et le précédent ont une base commune AD; et si l'on prolonge le côté CG parallèle à AD (et par conséquent à D'H), le point M sera le milieu de la corde CC'. Or, les hauteurs des deux parallélogrammes sont MK pour le premier, et D'K' pour le second; MK étant évidemment plus petit que D'K', il en résulte que le parallélogramme ADGC, formé sur deux demi-diamètres quelconques, est moindre que le parallélogramme construit sur les demi-diamètres conjugués, et par conséquent moindre que ab.

La réciproque du premier théorème (n° 137) est une conséquence de ce que nous venons de démontrer.

En effet, supposons que le parallélogramme formé sur deux demi-diamètres soit égal à ab, il faudra nécessairement que ces diamètres soient conjugués, car s'ils ne l'étaient pas, le parallélogramme devrait être moindre que ab.

La réciproque du théorème II n'est pas vraie. La somme des carrés de deux diamètres peut être égale à la somme des carrés des axes, sans que ces diamètres soient conjugués.

En effet, supposons que AC, AC' (*fig.* 82), soient des diamètres conjugués; on aura

$$\overline{AC}^2 + \overline{AC'}^2 = a^2 + b^2.$$

Abaissons du point C' une perpendiculaire C'OH sur le petit axe AD. Le demi-diamètre AH sera égal à AC'; il en résultera

$$\overline{AC}^2 + \overline{AH}^2 = a^2 + b^2,$$

et il est visible que AC et AH ne sont pas deux demi-diamètres conjugués.

Deuxième remarque. — Soient AC, AC' (*fig.* 82), deux demi-diamètres conjugués quelconques. La somme des carrés des abscisses des extrémités de ces diamètres est égale à a^2, et la somme des carrés des ordonnées des mêmes points est égale à b^2.

Nommons x', y', les coordonnées du point C, et x'', y'', celles du point C'; désignons par α, α', les tangentes des angles CAX, C'AX.

On aura

$$y' = \alpha x', \quad \text{et} \quad y'' = \alpha' x'';$$

de plus,

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2.$$

Remplaçant dans cette dernière équation y' par $\alpha x'$, il vient

$$(1) \qquad (a^2 \alpha^2 + b^2) x'^2 = a^2 b^2.$$

On trouvera de même

$$(2) \qquad (a^2 \alpha'^2 + b^2) x''^2 = a^2 b^2.$$

On a d'ailleurs

$$(3) \qquad \alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Pour trouver la relation énoncée, il faut éliminer α, α', entre ces trois dernières équations.

A cet effet, on tirera de l'équation (3)

$$\alpha'^2 = \frac{b^4}{a^4 \alpha^2}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (2), et simplifiant, il viendra

$$(a^2 \alpha^2 + b^2) x''^2 = a^4 \alpha^2;$$

on a déjà

$$(a^2 \alpha^2 + b^2) x'^2 = a^2 b^2;$$

ajoutant ces deux équations membre à membre, on obtient

$$(a^2 \alpha^2 + b^2)(x'^2 + x''^2) = a^2 (a^2 \alpha^2 + b^2),$$

d'où

$$(m) \qquad x'^2 + x''^2 = a^2.$$

Si l'on additionne membre à membre les équations

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2,$$

$$a^2 y''^2 + b^2 x''^2 = a^2 b^2,$$

on aura

$$a^2(y'^2+y''^2)+b^2(x'^2+x''^2)=2a^2b^2,$$

ou, parce que $x'^2+x''^2=a^2$,

$$a^2(y'^2+y''^2)=a^2b^2,$$

d'où

$$(n)\qquad y'^2+y''^2=b^2.$$

Les équations (m) et (n) démontrent le principe énoncé.

Le théorème II (nº 137) se déduit immédiatement de celui qui précède, car on a

$$\overline{AC}^2+\overline{AC'}^2=y'^2+x'^2+y''^2+x''^2=a^2+b^2.$$

138. Les équations

$$a^2\sin\alpha\sin\alpha'+b^2\cos\alpha\cos\alpha'=0,$$

$$a'^2=\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha},$$

$$b'^2=\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha'+b^2\cos^2\alpha'},$$

permettent de trouver trois des six quantités a, b, a', b', α, α', quand les trois autres sont connues. Toutefois, on les remplace par les trois suivantes, qui en sont déduites :

$$(1)\qquad \operatorname{tang}\alpha.\operatorname{tang}\alpha'=-\frac{b^2}{a^2},$$

$$(2)\qquad a'b'\sin(\alpha'-\alpha)=ab,$$

$$(3)\qquad a'^2+b'^2=a^2+b^2.$$

Nous traiterons seulement les deux questions qui suivent :

Première question. — Étant donnés les axes d'une ellipse et l'angle de deux diamètres conjugués, trouver ces diamètres en grandeur et en direction.

Posons

$$\alpha'-\alpha=\gamma.$$

L'équation (2) donne

$$2\,a'\,b' = \frac{2\,ab}{\sin\gamma}.$$

Ajoutant, membre à membre, cette dernière équation avec l'équation (3), il vient

$$(a' + b')^2 = a^2 + b^2 + \frac{2\,ab}{\sin\gamma}. \tag{4}$$

Retranchant, membre à membre, les mêmes équations, on trouve

$$(a' - b')^2 = a^2 + b^2 - \frac{2\,ab}{\sin\gamma}. \tag{5}$$

Regardant a' comme le plus grand des deux diamètres conjugués, on tire des équations (4) et (5)

$$a' + b' = \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2\,ab}{\sin\gamma}},$$

$$a' - b' = \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{2\,ab}{\sin\gamma}},$$

et, par suite,

$$a' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2\,ab}{\sin\gamma}} + \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{2\,ab}{\sin\gamma}}\right),$$

$$b' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2\,ab}{\sin\gamma}} - \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{2\,ab}{\sin\gamma}}\right).$$

Les grandeurs des diamètres étant calculées, cherchons les directions de ces lignes.

De l'équation

$$\alpha' - \alpha = \gamma$$

on tire

$$\alpha' = \alpha + \gamma;$$

d'où

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\gamma}{1 - \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\gamma}.$$

Remplaçant $\tang \alpha'$ par $-\frac{b^2}{a^2 \tang \alpha}$, il vient

$$\frac{-b^2}{a^2 \tang \alpha} = \frac{\tang \alpha + \tang \gamma}{1 - \tang \alpha \ \tang \gamma};$$

faisant disparaître les dénominateurs, on obtient l'équation

$$\tang^2 \alpha + \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \tang \gamma \times \tang \alpha + \frac{b^2}{a^2} = 0,$$

qui donne

$$\tang \alpha = \frac{-(a^2 - b^2) \tang \gamma \pm \sqrt{(a^2 - b^2)^2 \tang^2 \gamma - 4 a^2 b^2}}{2 a^2}.$$

On trouve deux valeurs pour $\tang \alpha$, parce qu'il existe, en général, deux systèmes de diamètres conjugués qui forment entre eux un angle donné.

Pour que ces valeurs soient réelles, il faut qu'on ait

$$\tang^2 \gamma > \frac{4 a^2 b^2}{(a^2 - b^2)^2};$$

d'où, en valeur absolue,

$$\tang \gamma > \frac{2 ab}{(a^2 - b^2)}.$$

Quand l'angle donné γ est aigu, il doit donc être au moins égal à celui dont la tangente est $\frac{2ab}{a^2 - b^2}$; et quand il est obtus, il faut qu'il soit au plus égal à l'angle dont la tangente est $-\frac{2ab}{a^2 - b^2}$. Ces tangentes sont celles de l'angle minimum et de l'angle maximum des cordes supplémentaires (nº 132).

La condition de réalité des valeurs de a' et b' conduit aux mêmes conséquences.

En effet, on doit avoir

$$a^2 + b^2 > \frac{2ab}{\sin \gamma},$$

d'où

$$\sin^2\gamma > \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2};$$

par conséquent,

$$\cos^2\gamma < 1 - \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2},$$

ce qui donne

$$\cos^2\gamma < \frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2}.$$

On en conclut

$$\frac{\sin^2\gamma}{\cos^2\gamma} > \frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)^2}, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}^2\gamma > \frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)^2}.$$

L'hypothèse

$$\operatorname{tang}\gamma = \pm\frac{2ab}{a^2-b^2}$$

conduit à

$$\operatorname{tang}\alpha = \mp\frac{b}{a};$$

ce qui détermine les deux diamètres conjugués qui forment l'angle maximum et l'angle minimum.

Deuxième question. — Connaissant deux diamètres conjugués et l'angle qu'ils font entre eux, trouver les axes en grandeur et en direction.

Les équations (2) et (3) (page 215) reviennent à

$$ab = a'b'\sin(\alpha'-\alpha) = a'b'\sin\gamma,$$

$$a^2+b^2 = a'^2+b'^2.$$

Opérant comme précédemment, on a

$$(a+b)^2 = a'^2+b'^2+2a'b'\sin\gamma,$$

$$(a-b)^2 = a'^2+b'^2-2a'b'\sin\gamma;$$

d'où

$$(a+b) = \sqrt{a'^2+b'^2+2a'b'\sin\gamma},$$

$$(a-b) = \sqrt{a'^2+b'^2-2a'b'\sin\gamma}.$$

Ces deux dernières équations donnent immédiatement

$$a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b'\sin\gamma} + \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b'\sin\gamma}\right),$$

$$b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b'\sin\gamma} - \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b'\sin\gamma}\right).$$

La solution est plus élégante quand on construit les valeurs

$$\sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b'\sin\gamma}, \quad \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b'\sin\gamma}$$

de $(a+b)$ et $(a-b)$.

Soient GG', HH' (*fig.* 83), les deux diamètres $2a'$, $2b'$, conjugués, placés sous l'angle donné γ; de l'extrémité H menons sur GG' la perpendiculaire HK, et prenons

$$\mathrm{HE} = \mathrm{HE}' = a'.$$

En joignant au centre A les points E, E', les triangles obliquangles AHE, AHE', donnent respectivement

$$\mathrm{AE} = \sqrt{\overline{\mathrm{HE}}^2 + \overline{\mathrm{AH}}^2 + 2\,\mathrm{HE}.\mathrm{HK}} = \sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b'\sin\gamma},$$

$$\mathrm{AE}' = \sqrt{\overline{\mathrm{HE}'}^2 + \overline{\mathrm{AH}}^2 - 2\,\mathrm{HE}'.\mathrm{HK}} = \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b'\sin\gamma}.$$

On a alors

$$\mathrm{AE} = a + b, \quad \mathrm{AE}' = a - b.$$

Si l'on prolonge EA d'une longueur $\mathrm{AI} = \mathrm{AE}'$, et si l'on prend $\mathrm{AI}' = \mathrm{AE}'$, on obtiendra

$$2a = \mathrm{EI}, \quad 2b = \mathrm{EI}'.$$

Pour déterminer les directions des axes : par les extrémités du premier diamètre GG', on mène des parallèles au second diamètre HH', et par les extrémités de ce dernier on mène des parallèles à l'autre; ces quatre parallèles sont tangentes à l'ellipse, aux points G, G', H, H'. Ensuite, du centre A avec a pour rayon, on décrit une circonfé-

rence, rencontrant les tangentes MN, N'N, aux points P, Q. Les perpendiculaires élevées en ces points aux deux tangentes doivent passer par un des foyers, par conséquent leur point de rencontre F est un foyer de l'ellipse. En joignant ce point F au centre, on aura la direction du grand axe BB'. On voit facilement ce qu'il faut faire pour déterminer la position du second axe DD' (*).

139. On a trouvé (n° 135), pour l'équation de l'ellipse rapportée à ses diamètres conjugués,

$$a'^2 y^2 + b'^2 x^2 = a'^2 b'^2.$$

Cette équation étant absolument de la même forme que celle qui est relative aux axes, les propriétés indépendantes de l'inclinaison des coordonnées doivent être communes aux axes de l'ellipse et à ses diamètres conjugués. On peut alors regarder comme démontrées les propositions suivantes :

1°. Selon qu'un point est situé sur l'ellipse, hors de l'ellipse ou dans l'ellipse, la quantité

$$a'^2 y^2 + b'^2 x^2 - a'^2 b'^2$$

est nulle, positive ou négative.

2°. Les carrés des ordonnées parallèles à un diamètre

(*) Les axes BB', DD', sont les bissectrices des angles formés par les droites AE, AE'. En effet, prolongeons les axes BB', DD', jusqu'à la tangente MN, aux points S, R. Le produit HR $\times$ HS des segments de la tangente, compris entre la courbe et les axes, est égal au carré du demi-diamètre AG parallèle à la tangente (n° 139, 5°). Donc

$$\text{HR} \times \text{HS} = \text{HE} \times \text{HE}'.$$

Par conséquent, les quatre points R, S, E, E', appartiennent à une même circonférence qui a pour diamètre la droite RS perpendiculaire sur le milieu de la corde EE'. Et comme l'angle RAS est droit, cette circonférence passe encore par le point A. De plus, le point S est le milieu de l'arc ESE'. Donc les angles SAE, SAE', sont égaux entre eux ; c'est ce qu'il fallait démontrer.

sont entre eux comme les produits des segments que ces ordonnées déterminent sur son conjugué.

3°. En nommant α le coefficient angulaire de la tangente, et x', y', les coordonnées du point de contact, on doit avoir

$$\alpha = -\frac{b'^2 x'}{a'^2 y'};$$

et pour l'équation de la tangente,

$$a'^2 y' y + b'^2 x' x = a'^2 b'^2.$$

La sous-tangente a pour valeur $\left(\frac{a'^2 - x'^2}{x'}\right)$, en désignant par x' l'abscisse du point de contact. On aura, pour la tangente et le diamètre mené au point de contact, la relation

$$\alpha \alpha' = -\frac{b'^2}{a'^2}.$$

4°. Si $y = \delta x + 6$ est l'équation d'une corde quelconque, et $y = \delta' x$ celle du diamètre qui passe par les milieux de toutes les cordes parallèles, on trouvera

$$\delta\delta' = -\frac{b'^2}{a'^2};$$

relation qui a lieu pour deux diamètres conjugués, dont les équations seraient $y = \delta x$, $y = \delta' x$, ainsi que pour deux cordes supplémentaires menées aux extrémités d'un diamètre quelconque.

5°. *Le produit des segments* DG, DH (fig. 84), *d'une tangente, compris entre le point de contact et deux diamètres conjugués* AE', AE, *est égal au carré du demi-diamètre* AD', *parallèle à la tangente.*

Prenons pour axes de coordonnées les droites ADX, AD'Y. Nommons a', b', les droites AD, AD', et désignons par δ, δ', les coefficients angulaires des diamètres con-

jugués AE′, AE. Les équations des droites AE′, AE, GH, seront $y = \delta x$, $y = \delta' x$, $x = a'$; les ordonnées GD, DH, auront pour valeurs $a'\delta$, $a'\delta'$, dont le produit égale $a'^2\delta\delta'$, ou $-b'^2$, puisque

$$\delta\delta' = -\frac{b'^2}{a'^2}.$$

Donc

$$DG \times DH = AD'^2.$$

140. L'ellipse étant rapportée à deux diamètres conjugués, on peut proposer de mener une tangente à la courbe par un point extérieur N (*fig.* 85). En désignant par x'', y'', les coordonnées du point connu, les équations qui servent à déterminer les coordonnées x', y', du point de contact seront

$$(1) \qquad a'^2y'^2 + b'^2x'^2 = a'^2b'^2,$$

$$(2) \qquad a'^2y''y' + b'^2x''x' = a'^2b'^2.$$

L'équation (2) exprime que la tangente dont l'équation est

$$a'^2y'y + b'^2x'x = a'^2b'^2,$$

passe par le point donné.

En regardant x', y', comme des variables, l'équation (1) représente l'ellipse donnée, et l'équation (2) une droite qui, par son intersection avec la courbe, détermine les points de contact cherchés. Pour construire cette droite, on fera successivement dans son équation $y' = 0$, $x' = 0$, ce qui donnera

$$x' = \frac{a'^2}{x''}, \qquad y' = \frac{b'^2}{y''}.$$

Prenant AK (*fig.* 85) égale à $\frac{a'^2}{x''}$, AK′ $= \frac{b'^2}{y''}$, et joignant les points K et K′ par une droite, les points de rencontre M et M′ de cette droite avec la courbe satisferont à la question.

On voit que la distance $AK = \frac{a'^2}{x''}$ est indépendante de l'ordonnée y'' du point N; par conséquent, si l'on mène la droite NN' parallèle à l'axe des y, et si, d'un autre point de cette droite, on conduit des tangentes à l'ellipse, la sécante qui déterminera les nouveaux points de contact passera par le point K. Le point K ne pourrait changer que dans le cas où x'' changerait. De là résulte le théorème suivant :

Si de chaque point d'une droite située comme on voudra sur le plan d'une ellipse, on mène des tangentes à la courbe, et qu'on joigne les deux points de contact, on aura une suite de sécantes qui passeront toutes par un même point du diamètre conjugué de celui qui est parallèle à la droite donnée.

Réciproquement, *si par un point donné dans le plan d'une ellipse on tire différentes sécantes, et que par les points de rencontre de chaque sécante on mène des tangentes à la courbe, le lieu des points d'intersection de ces tangentes, deux à deux, est une droite parallèle au diamètre conjugué de celui qui passe par le point donné.*

141. L'équation

$$a'^2 y^2 + b'^2 x^2 = a'^2 b'^2$$

donne un moyen simple pour décrire par points une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués $2a'$, $2b'$, et l'angle qu'ils font entre eux.

On construit d'abord une ellipse ayant pour axes $2a'$, $2b'$; ensuite, on incline les ordonnées sous l'angle donné, en conservant leurs grandeurs. Les points N, N', etc. (*fig.* 86), déterminés par ce procédé, appartiennent nécessairement à la courbe.

Quadrature de l'ellipse.

142. En désignant, comme précédemment, par $2a$, $2b$, les axes de l'ellipse, décrivons sur le plus grand, $2a$, une circonférence de cercle (*fig.* 87), et nommons Y, y, deux ordonnées du cercle et de l'ellipse correspondantes à la même abscisse. On a vu que $\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}$; nous allons démontrer que ce rapport est encore celui des surfaces de l'ellipse et du cercle.

En effet, inscrivons dans le cercle un polygone quelconque $B'MM'M''$ etc., et de chacun des sommets abaissons des perpendiculaires sur l'axe BB'; en joignant les points où ces droites coupent l'ellipse, on formera un polygone $BNN'N''$ etc., intérieur à cette courbe. Un trapèze quelconque $PNN'P'$ de l'ellipse a pour mesure

$$\left(\frac{PN + P'N'}{2}\right) \times PP';$$

le trapèze correspondant du cercle a pour expression

$$\left(\frac{PM + P'M'}{2}\right) \times PP'.$$

Ces deux trapèzes sont entre eux comme $PN + P'N'$ est à $PM + P'M'$. Or $PN : PM :: b : a$, et $PN' : PM' :: b : a$; donc $PN + P'N' : PM + P'M' :: b : a$. On voit par là que les trapèzes correspondants sont entre eux comme b est à a. De sorte que si l'on représente par t, t', t'', etc., les trapèzes de l'ellipse, et par T, T', T'', etc., les trapèzes du cercle, on aura la suite de rapports égaux

$$t : T :: t' : T' :: t'' : T'' :: \ldots :: b : a.$$

On en déduira

$$(t + t' + t'' + \ldots) : (T + T' + T'' + \ldots) :: b : a.$$

Cette dernière proportion étant indépendante et du nombre et de la grandeur des trapèzes, on en peut conclure que *la surface de l'ellipse est à celle du cercle décrit sur le grand axe, dans le rapport du second axe au premier.*

En représentant par E l'aire de l'ellipse, et par E' celle du cercle, on aura donc $\frac{E}{E'} = \frac{b}{a}$. Comme $E' = \pi a^2$, on trouve $E = \pi ab$; c'est-à-dire que *la surface de l'ellipse est égale à celle d'un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre les demi-axes de l'ellipse.*

Si a', b', sont deux demi-diamètres conjugués comprenant l'angle θ, on sait que $ab = a'b' \sin\theta$. Par conséquent, l'aire de l'ellipse en fonction des diamètres conjugués est

$$E = \pi . a' b' \sin\theta.$$

Si l'on voulait calculer un segment quelconque PNN″P″ compris entre deux ordonnées perpendiculaires à l'axe BB′, en désignant sa valeur par s, et par s' celle du segment de cercle correspondant, on aurait, au moyen du raisonnement qui précède,

$$\frac{s}{s'} = \frac{b}{a}, \quad \text{d'où} \quad s = \frac{b}{a} \times s'.$$

Ce qui ramène la quadrature du premier segment à celle du second, que la géométrie détermine.

S'il s'agissait du segment PNP‴N‴ (*fig.* 88), compris entre un diamètre quelconque BB′ et deux ordonnées parallèles à son conjugué, on décrirait d'abord sur BB′, comme diamètre, une circonférence de cercle; on inscrirait une portion de polygone NN′N″N‴ dans le segment d'ellipse, puis on mènerait les ordonnées PN, P′N′, P″N″, etc., de cette courbe, et les ordonnées correspondantes PM, P′M′, P″M″, etc., du cercle. En joignant les points M, M′, M″, M‴, par des droites, on forme des trapèzes rectangulaires, correspondants aux trapèzes obliques de l'ellipse. Si l'on

abaisse une perpendiculaire SI sur PN, le trapèze PNP′N′ aura pour mesure

$$\left(\frac{PN + P'N'}{2}\right) \times SI = \left(\frac{PN + P'N'}{2}\right) \times PP' \sin\theta.$$

La surface du trapèze correspondant PMP′M′ sera

$$\left(\frac{PM + P'M'}{2}\right) \times PP'.$$

Donc, le rapport des deux trapèzes est

$$\frac{(PN + P'N')\sin\theta}{(PM + P'M')}.$$

L'équation de l'ellipse rapportée aux diamètres conjugués donne

$$y^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(a'^2 - x^2);$$

celle du cercle décrit sur BB′ comme diamètre, et rapportée à des axes rectangulaires, conduit à

$$Y^2 = a'^2 - x^2.$$

Donc

$$\frac{PN}{PM} = \frac{b'}{a'},$$

et, par conséquent,

$$\frac{(PN + P'N')\sin\theta}{PM + P'M'} = \frac{b'}{a'}\sin\theta.$$

Le rapport des trapèzes correspondants est toujours le même; on en conclut sans peine, en désignant le segment elliptique par S, le segment circulaire par S′, que

$$\frac{S}{S'} = \frac{b'}{a'}\sin\theta, \quad \text{d'où} \quad S = S' . \frac{b'}{a'}\sin\theta.$$

Pour obtenir toute l'ellipse, on prend $S' = \pi a'^2$, et l'on a

$$S = \pi a' b' \sin\theta.$$

CHAPITRE DIXIÈME.

DE L'HYPERBOLE.

De l'hyperbole rapportée à ses axes.

143. Par une double transformation de coordonnées, et en prenant les axes rectangulaires, on ramène (n° 99) l'équation de l'hyperbole à la forme

$$y^2 - m^2x^2 = p.$$

Lorsque $p = 0$, on a

$$y^2 = m^2x^2, \quad \text{d'où} \quad y = \pm mx.$$

Dans ce cas, l'équation représente un système de deux droites.

Comme p peut être positif ou négatif, on a à considérer les deux cas suivants :

$$(1) \qquad y^2 - m^2x^2 = b^2,$$

$$(2) \qquad y^2 - m^2x^2 = -b^2.$$

La première de ces équations se ramène à la seconde, en remplaçant x par y, y par x; divisant par m^2, et changeant les signes des deux membres. En effet, on trouve alors

$$y^2 - \frac{x^2}{m^2} = -\frac{b^2}{m^2};$$

équation entièrement semblable à la seconde, et qui pourrait s'en déduire en mettant dans celle-ci $\frac{1}{m^2}$ à la place de m^2, et $\frac{b^2}{m^2}$ à la place de b^2.

Il résulte de là qu'il suffit de considérer l'équation (2).

144. On voit par la forme de cette équation que l'origine est le centre de la courbe, et que les axes des coordonnées sont aussi des axes de cette même courbe.

Un seul des axes rencontre l'hyperbole. En effet, $y = 0$ donne

$$x = \pm \frac{b}{m},$$

et $x = 0$ donne

$$y = \pm b\sqrt{-1}.$$

L'axe des abscisses coupe la courbe aux points B, B' (*fig.* 89), situés à une distance du centre égale à $\frac{b}{m}$. L'axe des y ne la rencontre pas, puisque $x = 0$ donne pour y des valeurs imaginaires.

Si l'on pose $\frac{b}{m} = a$, on en tire $m = \frac{b}{a}$, ce qui donne, en substituant dans (2), l'équation

$$(3) \qquad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

L'axe BB', égal à $2a$, se nomme *premier axe* ou *axe transverse*.

Quoique l'axe des y ne rencontre pas l'hyperbole, on porte néanmoins sur cet axe les distances AD, AD', égales à b, et la longueur DD' égale à $2b$ est ce que l'on convient de prendre pour *second axe*.

Les extrémités B, B', du premier axe, sont les *sommets* de l'hyperbole.

Il est quelquefois utile de placer l'origine des coordonnées à l'un des sommets. Supposons qu'on veuille la transporter au sommet B, par exemple; on remplacera, dans l'équation (3), x par $(x + a)$, et l'on trouvera facilement

$$(4) \qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2).$$

Quand $b = a$, les équations (3) et (4) deviennent

$$y^2 - x^2 = -a^2,$$

$$y^2 = 2ax + x^2.$$

Alors, on dit que l'hyperbole est *équilatère*. Cette dernière courbe est parmi les hyperboles ordinaires ce qu'est le cercle parmi les ellipses.

145. Discutons maintenant l'équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

En la résolvant par rapport à y, il vient

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Tant que x est plus petit que a, les valeurs de y sont imaginaires. Pour $x = a$, on a $y = 0$; x augmentant jusqu'à $+\infty$, y a deux valeurs réelles égales et de signes contraires qui croissent jusqu'à l'infini. Les valeurs positives de x déterminent donc une branche de courbe MBM″ (*fig.* 89), qui s'étend à l'infini du côté des x positifs, et qui est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Les valeurs négatives de x donnent une seconde branche NB′N″ entièrement semblable à la première, de l'autre côté de l'axe des y, puisqu'en changeant seulement le signe de x, les valeurs de y restent les mêmes.

Le point M ayant pour coordonnées x et y, le triangle rectangle AMP donne

$$\text{AM} = \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)} = \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2}\right)x^2 - b^2}.$$

L'abscisse pouvant croître jusqu'à l'infini, la distance AM peut aussi croître jusqu'à l'infini. La plus petite valeur de x est a, le minimum de AM est donc AB $= a$. On conclut de là que l'axe transverse est la plus petite des lignes menées par le centre et terminées à la courbe.

146. L'équation $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ donne

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2}(x+a)(x-a).$$

Si l'on suppose $y = \text{MP}$ (*fig.* 89), on aura

$$\text{BP} = x - a, \quad \text{B}'\text{P} = x + a,$$

et, par suite,

$$\overline{\text{MP}}^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \text{BP} \times \text{B}'\text{P}.$$

Pour une autre ordonnée quelconque M′P′, on aurait de même

$$\overline{\text{M}'\text{P}'}^2 = \frac{b^2}{a^2}\text{BP}' \times \text{B}'\text{P}';$$

donc

$$\frac{\overline{\text{MP}}^2}{\overline{\text{M}'\text{P}'}^2} = \frac{\text{BP} \times \text{B}'\text{P}}{\text{BP}' \times \text{B}'\text{P}'}.$$

C'est-à-dire que *les carrés des ordonnées de l'hyperbole sont entre eux comme les produits des distances comprises entre les pieds de ces ordonnées et les sommets de la courbe.*

147. Pour tout point de l'hyperbole, on a

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0.$$

Quand un point H (*fig.* 89) est extérieur, son abscisse AP est moindre que celle du point M′, et son ordonnée est la même; on a donc

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 > 0.$$

On démontrerait de la même manière que pour un point H′ intérieur, on a

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 < 0.$$

148. En comparant les équations

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

on voit que l'on passe de la première à la seconde en changeant b^2 en $-b^2$. Cette remarque trouvera par la suite d'utiles applications.

Des foyers et des directrices.

149. Ce qu'on a dit sur les foyers de l'ellipse s'applique presque entièrement à l'hyperbole.

Reprenons l'équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

Les foyers sont des points dont la distance à un point quelconque de la courbe est exprimée rationnellement en fonction de l'abscisse de ce point. Désignons toujours par x', y', les coordonnées d'un foyer; par x et y celles d'un point de l'hyperbole, et par δ la distance des deux points. Nous aurons

$$\delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 = x^2 - 2x'x + x'^2 + y^2 - 2y'y + y'^2.$$

Or, $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$; portant cette valeur dans l'expression précédente, elle devient

$$\delta^2 = x^2 - 2x'x + x'^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) - 2y'\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} + y'^2.$$

δ^2, et à plus forte raison δ, ne peut être rationnelle en x qu'autant que le terme $2y'\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ est nul; ce qui exige qu'on ait $y' = 0$. On trouve alors

$$\delta^2 = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2}\right)x^2 - 2x'x + x'^2 - b^2.$$

Cette expression devant être un carré parfait, il faut que

$$x'^2 = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)(x'^2 - b^2);$$

ce qui conduit à

$$x' = \pm\sqrt{a^2+b^2}.$$

L'hyperbole a donc deux foyers placés sur l'axe transverse, de chaque côté du centre, à la distance $\sqrt{a^2+b^2}$.

Pour les déterminer, on élève au point B (*fig.* 90), extrémité du premier axe, une perpendiculaire BG égale à la moitié du second; on joint AG; du point A comme centre, avec AG pour rayon, on décrit une circonférence qui rencontre le premier axe aux points F, F′ : ces points sont les foyers de l'hyperbole.

La distance de l'un des foyers au centre se nomme *excentricité* de l'hyperbole.

Soit $\sqrt{a^2+b^2} = c$; les distances d'un point quelconque, M, de l'hyperbole aux deux foyers F, F′, s'obtiendront, en remplaçant successivement x' par $+c$, et $-c$, dans la valeur de δ^2; on trouvera

$$\overline{FM}^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2,$$

$$\overline{F'M}^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} + 2cx + a^2;$$

d'où

$$FM = \pm\left(\frac{cx}{a} - a\right), \quad F'M = \pm\left(\frac{cx}{a} + a\right).$$

Les distances FM, F′M, qu'on nomme *rayons vecteurs*, doivent être positives. Or, quand le point M reste sur la branche située du côté des x positifs, le terme $\frac{cx}{a}$ est positif et plus grand que a; il faut donc, alors, prendre les signes supérieurs. Mais, si le point M est sur l'autre branche, le

terme $\frac{cx}{a}$ est négatif et toujours plus grand que a. Il faut, dans ce cas, prendre les signes inférieurs, pour que les rayons vecteurs FM, F'M, soient positifs.

150. Quand on retranche les deux distances l'une de l'autre, on obtient

$$F'M - FM = 2a$$

pour la première branche, et

$$FM - F'M = 2a$$

pour la seconde. Il résulte de là, que *dans l'hyperbole, la différence des rayons vecteurs est constante et égale à l'axe transverse.*

Quand un point N (*fig.* 90) est extérieur à l'hyperbole, on a

$$F'N - FN < 2a.$$

En effet, soit M le point où FN coupe l'hyperbole, on a

$$F'N < F'M + MN,$$

$$FN = FM + MN;$$

d'où l'on tire

$$F'N - FN < F'M - FM, \quad \text{ou} \quad F'N - FN < 2a.$$

Pour un point intérieur N', on doit avoir

$$F'N' - FN' > 2a.$$

En effet, on a

$$F'N' > F'M - MN',$$

$$FN' = FM - MN';$$

retranchant membre à membre, on obtient

$$F'N' - FN' > F'M - FM, \quad \text{ou} \quad F'N' - FN' > 2a.$$

On voit par là que, *suivant qu'un point est situé sur l'hy-*

perbole, hors de l'hyperbole, ou dans l'hyperbole, la différence de ses distances aux deux foyers est égale au premier axe, moindre ou plus grande que cet axe.

Il est facile maintenant de décrire une hyperbole quand on connaît l'axe transverse BB', et les foyers F, F'. Du foyer F (*fig.* 91), comme centre, avec un rayon égal à BN, on décrit une circonférence de cercle; du foyer F', avec un rayon égal à B'N, ou BB'+BN, on décrit une seconde circonférence : les points où ces circonférences se coupent, appartiennent à l'hyperbole; car, en désignant par M un de ces points, on aura

$$F'M - FM = BB'.$$

Pour décrire la courbe d'un mouvement continu, on fixe au foyer F' une règle F'M, que l'on peut faire tourner autour de ce point; à l'extrémité M et au foyer F on attache un fil FM d'une longueur telle, que F'M — FM soit égale à l'axe transverse BB'. En faisant glisser la pointe d'un style le long de la règle, de manière que le fil s'y applique toujours, la pointe du style décrira l'hyperbole.

151. En suivant le même ordre que pour l'ellipse, on est conduit à chercher une courbe telle, que la différence des distances de chacun de ses points à deux points fixes soit constamment égale à une longueur donnée $2a$.

Soient F, F' (*fig.* 91), les deux points donnés; il est facile de reconnaître que la courbe est symétrique par rapport à la droite FF', et aussi par rapport à la perpendiculaire AY élevée sur le milieu de cette droite. Prenons alors ces droites pour axes de coordonnées. Désignons par x et y les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe; par $2c$ la distance FF'. Puisque la différence des distances F'M, FM, doit être égale à $2a$, on peut représenter F'M par $z+a$, et FM par $z-a$. Les triangles rectangles F'MP,

FMP, donnent

$$(z+a)^2 = y^2 + (x+c)^2, \quad (z-a)^2 = y^2 + (c-x)^2.$$

Soustrayant la seconde équation de la première, il vient

$$4az = 4cx, \text{ d'où } z = \frac{cx}{a}.$$

Portant cette valeur dans l'une des équations précédentes, on obtient

$$a^2y^2 - (c^2 - a^2)x^2 = -a^2(c^2 - a^2).$$

Il est visible que cette équation représente une hyperbole dont les axes sont $2a$ et $2\sqrt{c^2 - a^2}$.

152. L'hyperbole a aussi *deux directrices*.

Prenons du côté AB (*fig.* 90) une distance $AK = d$, élevons au point K la perpendiculaire KL à l'axe transverse. En abaissant d'un point quelconque M de la courbe, la perpendiculaire MI sur KL, et en menant le rayon vecteur FM, on aura

$$\frac{FM}{IM} = \frac{\frac{cx}{a} - a}{x - d} = \frac{cx - a^2}{cx - cd} \times \frac{c}{a}.$$

Ce rapport sera constant et égal à $\frac{c}{a}$, si l'on prend le point K de manière que $cd = a^2$. La conséquence est la même quelle que soit celle des deux branches sur laquelle on prend le point M.

Si l'on détermine le point K' de manière que $AK' = AK$, et si l'on élève la perpendiculaire K'L' à BB', on reconnaîtra sans peine que le rapport des distances F'M et I'M est encore égal à $\frac{c}{a}$.

Il résulte de là qu'en nommant *directrices* les droites KL, K'L', on pourra dire, comme pour l'ellipse, *que les distances de chaque point de l'hyperbole, à l'un des foyers*

et à la directrice voisine de ce foyer, sont entre elles comme l'intervalle des foyers est à l'axe transverse.

153. En partant de cette propriété, on est conduit à la question énoncée (page 180). On a vu que le lieu demandé est une hyperbole quand on a $m > n$.

Soient F et KL (*fig.* 90) le point et la droite donnés; on abaisse du point F la perpendiculaire indéfinie FK sur KL, en prenant ensuite le point B de manière qu'on ait

$$FB : BK :: m : n;$$

ce point appartiendra à la courbe, on pourra supposer $FB = m$, $BK = n$. En plaçant l'origine au point B, et en choisissant pour axe des x la droite BF, et pour axe des y la perpendiculaire élevée à cette droite au point B, on obtiendra encore l'équation

$$n^2 y^2 + (n^2 - m^2) x^2 - 2mn(n+m)x = 0.$$

Dans le cas actuel, le coefficient $n^2 - m^2$ est négatif, puisque m est plus grand que n. Il convient alors d'écrire l'équation comme il suit :

$$n^2 y^2 - (m^2 - n^2) x^2 - 2mn(n+m)x = 0.$$

L'hypothèse $y = 0$ donne

$$x = 0, \quad x = -\frac{2mn}{m-n};$$

la courbe rencontre donc l'axe des x aux points B, B', ce second point étant à une distance de l'origine marquée par $\frac{2mn}{m-n}$. Si l'on transporte l'origine des coordonnées au milieu A de BB', en remplaçant x par $x - \frac{mn}{m-n}$, on obtiendra

$$n^2 y^2 - (m^2 - n^2) x^2 = -\frac{m^2 n^2 (m+n)}{m-n}.$$

Les valeurs des demi-axes sont

$$a = \frac{mn}{m-n}, \quad b = m\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}.$$

En opérant comme pour l'ellipse, on a

$$\sqrt{a^2+b^2} = \frac{m^2}{m-n}, \quad \mathrm{AF} = \frac{m^2}{m-n}, \quad \mathrm{AF} \times \mathrm{AK} = a^2.$$

Ce qui prouve que le point donné F est un des foyers de l'hyperbole, et la droite KL une de ses directrices.

De la tangente et de la normale.

154. En prenant l'équation de l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

on est conduit, pour obtenir l'équation de la tangente, à exécuter les mêmes calculs que pour l'ellipse, avec la seule différence que partout b^2 est remplacé par $-b^2$. Il résulte de là qu'en nommant x', y', les coordonnées du point de contact, et α la tangente trigonométrique de l'angle que forme avec l'axe des x la tangente à la courbe, on aura

$$\alpha = \frac{b^2x'}{a^2y'}.$$

L'équation simplifiée de la tangente sera

$$a^2y'y - b^2x'x = -a^2b^2.$$

Pour démontrer à posteriori que tous les points de la tangente, excepté le point de contact, sont hors de l'hyperbole, il faut faire voir (n° 147) que pour tous ces points l'expression $a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2$ est positive.

A cet effet, tirons de l'équation de la tangente, la valeur de y,

$$y = \frac{b^2(x'x - a^2)}{a^2y'}.$$

Portons cette valeur à la place de y dans l'expression

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2$$

remplaçons $a^2y'^2$ par sa valeur $b^2x'^2 - a^2b^2$ tirée de l'équation de l'hyperbole, nous aurons

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = \frac{b^4(x'x - a^2)^2}{a^2y'^2} - b^2x^2 + a^2b^2$$

$$= \frac{b^4(x'x - a^2)^2 + (a^2b^2 - b^2x^2)(b^2x'^2 - a^2b^2)}{a^2y'^2} = \frac{b^4(x - x')^2}{y'^2}.$$

Tant que x est différent de x', ce second membre est positif, et l'on a

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 > 0.$$

Par conséquent, tous les points dont l'abscisse est différente de x', sont extérieurs à l'hyperbole.

L'hypothèse $x = x'$ donne

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0,$$

et ramène au point de tangence.

Lorsque dans la formule $\alpha = \frac{b^2x'}{a^2y'}$ on change seulement les signes des coordonnées, α conserve la même valeur. Par conséquent, si une droite passant par le centre rencontre la courbe en deux points, les tangentes en ces points sont parallèles.

En supposant dans la même formule $x' = \pm a$ et $y' = 0$, α devient infini; c'est-à-dire que les tangentes aux sommets de l'hyperbole sont perpendiculaires à l'axe.

155. Si l'on fait croître x' positivement depuis a jusqu'à l'infini, le point de contact M (*fig.* 91) prendra toutes les positions possibles sur l'arc de courbe situé dans l'angle YAX. Comme y' augmente avec x', on ne voit pas immédiatement quels sont les changements qui en résultent pour la valeur de α. Pour connaître ces changements, rempla-

çons y' par sa valeur $\frac{b}{a}\sqrt{x'^2-a^2}$, nous aurons

$$\alpha = \frac{b^2x'}{a^2.\frac{b}{a}\sqrt{x'^2-a^2}} = \frac{bx'}{a\sqrt{x'^2-a^2}} = \frac{b}{a\sqrt{1-\frac{a^2}{x'^2}}}.$$

On voit qu'en faisant croître x' depuis a jusqu'à l'infini, α diminue de l'infini à $\frac{b}{a}$. Donc la tangente s'incline de plus en plus sur l'axe jusqu'à cette dernière limite.

Pour savoir ce que devient la tangente, cherchons la distance AT du centre au point de rencontre de cette droite avec l'axe transverse. L'hypothèse $y=0$ donne

$$\text{AT} = \frac{a^2}{x'},$$

valeur qui diminue et tend vers zéro quand x' augmente, le signe étant toujours celui de x'. Par conséquent, à mesure que le point de contact s'éloigne sur l'hyperbole, le point T se rapproche du centre sans jamais passer de l'autre côté. La supposition $x'=\infty$ donne

$$\text{AT} = 0.$$

Il résulte de ce qui vient d'être dit, que dans le cas où le point de tangence est situé à l'infini sur l'arc BM, la tangente passe par le centre et forme avec l'axe des x un angle dont la tangente trigonométrique est $\frac{b}{a}$.

Pour construire cette tangente, on formera le rectangle HLH'L' sur les axes $2a$, $2b$, et l'on mènera la diagonale H'L. On aura

$$\text{tang LAB} = \frac{b}{a}.$$

A cause de la symétrie de la courbe, cette diagonale sera aussi la limite de position des tangentes menées à la courbe

dans l'angle $Y'AX'$. On peut reconnaître, sans peine, que la seconde diagonale $L'H$ est la limite des tangentes menées aux deux autres parties de l'hyperbole. Ces deux limites sont représentées par les équations

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Quand l'hyperbole est équilatère, on a

$$b = a;$$

par suite, les droites HL', $H'L$, divisent en deux parties égales les angles des axes, et sont perpendiculaires entre elles.

156. Pour obtenir la sous-tangente PT (*fig.* 91), on soustraira $AT = \frac{a^2}{x'}$ de AP ou x', et l'on aura

$$TP = \frac{x'^2 - a^2}{x'}.$$

Cette expression prouve que la sous-tangente peut recevoir toutes les valeurs de zéro à l'infini.

157. Lorsqu'on joint le centre au point de contact M (*fig.* 91), la droite AM forme avec l'axe des x un angle dont la tangente $\alpha' = \frac{y'}{x'}$. On a trouvé précédemment $\alpha = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}$ pour la tangente de l'angle MTX; faisant le produit de ces valeurs, il vient

$$\alpha\alpha' = \frac{b^2}{a^2};$$

donc, pour l'hyperbole comme pour l'ellipse, le produit des tangentes α, α', reste constant.

158. D'après ce qui précède, on trouvera facilement

(*fig.* 91)

$$\text{tang AMT} = \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)\, x' y'}.$$

Aux extrémités de l'axe transverse, y' étant nul, la valeur précédente devient infinie, c'est-à-dire que pour ces points la tangente est perpendiculaire à la droite menée du centre au point de contact. Il ne peut en être ainsi que pour ces points, puisque pour tous les autres, aucune des coordonnées x', y', ne pouvant être nulle, la tangente de l'angle AMT n'est pas infinie.

Si le point de contact s'éloigne sur la courbe dans l'angle YAX, les coordonnées x', y', augmentent positivement, et comme elles peuvent croître jusqu'à l'infini, la tangente de l'angle AMT peut diminuer jusqu'à zéro; il en est de même de cet angle; donc, quand le point de contact est à l'infini, la tangente MT se confond avec la droite AM, menée du centre à ce point de contact.

159. On a trouvé pour la tangente à l'hyperbole au point dont les coordonnées sont x', y', l'équation

$$(1) \qquad a^2 y' y - b^2 x' x = -a^2 b^2;$$

il est aisé d'obtenir l'équation de la tangente menée par un point extérieur, en représentant par x'', y'', les coordonnées de ce point. Comme elles doivent satisfaire à l'équation (1), on aura

$$a^2 y'' y' - b^2 x'' x' = -a^2 b^2.$$

D'ailleurs, le point (x', y') appartenant à la courbe, il viendra

$$a^2 y'^2 - b^2 x'^2 = -a^2 b^2.$$

En cherchant, comme pour l'ellipse, les valeurs de x', y', on obtient, dans l'expression de ces valeurs, un radical sous lequel se trouve la quantité

$$a^2 y''^2 - b^2 x''^2 + a^2 b^2.$$

On en conclut facilement que par un point extérieur, on peut mener deux tangentes à l'hyperbole; que ces deux tangentes se réduisent à une seule quand le point donné est sur la courbe, et que le problème devient impossible quand ce point est intérieur.

160. Donnons pour l'hyperbole une équation de la tangente indépendante des coordonnées du point de contact. Si l'on combine l'équation de la courbe

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

avec celle d'une droite

$$y = mx + n,$$

on trouvera, en opérant comme pour l'ellipse (n° 121), que l'équation de la tangente à l'hyperbole est

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}.$$

161. D'après la définition de la *normale*, il est aisé de voir qu'en désignant par x', y', les coordonnées du point de contact, l'équation de cette ligne est

$$y - y' = -\frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x').$$

En supposant $y = 0$ dans cette équation, il vient (*fig.* 91)

$$\text{AN} = \frac{(a^2 + b^2)x'}{a^2};$$

cette expression n'a pas de maximum, puisque x' peut croître jusqu'à l'infini. Si l'on fait décroître x', la valeur précédente diminue, le point M se rapproche du sommet B, et en donnant à x' sa plus petite valeur $x' = a$, la distance AN atteint son minimum, qui est égal à $\frac{a^2 + b^2}{a}$. On voit par là que si l'on prend $\text{AN}' = \frac{a^2 + b^2}{a}$, le point N se rap-

prochera de plus en plus de N' à mesure que le point de contact se rapprochera du sommet B.

162. Si l'on voulait mener une normale à l'hyperbole par un point extérieur ; en opérant, comme pour l'ellipse, on serait conduit à résoudre les deux équations

$$y'' - y' = \frac{-a^2y'}{b^2x'}(x'' - x'),$$

$$a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2.$$

L'élimination de y' conduirait encore à une équation complète du quatrième degré ayant son dernier terme négatif. La discussion serait la même que pour l'ellipse.

La résolution du problème par des lieux géométriques conduirait à la construction d'une hyperbole, passant par le centre de la première et par le point donné, les asymptotes de la seconde hyperbole étant parallèles aux axes de la proposée.

163. *Dans l'hyperbole, les rayons vecteurs menés au point de contact font avec la tangente et de deux côtés différents de cette ligne, des angles égaux.*

En effet, on sait que (*fig.* 92) $AT = \frac{a^2}{x'}$, et que $AF = c$; il en résulte

$$FT = c - \frac{a^2}{x'} = \frac{cx' - a^2}{x'}.$$

On trouverait de la même manière :

$$F'T = \frac{cx' + a^2}{x'}.$$

D'ailleurs,

$$FM = \frac{cx' - a^2}{a}, \quad F'M = \frac{cx' + a^2}{a};$$

donc

$$\frac{FT}{F'T} = \frac{FM}{F'M}.$$

Par conséquent, l'angle $FMT = F'MT$.

Cette propriété fournit le moyen de mener une tangente à l'hyperbole par un point pris sur la courbe, ou par un point extérieur.

Soit M le point donné sur la courbe, on mènera les rayons vecteurs FM, F'M. On prendra sur F'M, $MG = MF$, on joindra G, F, et du point M on abaissera MH perpendiculaire sur GF. Cette perpendiculaire sera la tangente demandée. En effet, cette droite divise l'angle F'MF en deux parties égales, puisque le triangle FMG est isocèle.

Il est facile de faire voir que MH a tous ses points hors de l'hyperbole, à l'exception du point M. Car, pour tout autre point N, on aura, en menant les droites NF, NF', NG,

$$NF' - NG < F'G.$$

Or,

$$NG = NF \quad \text{et} \quad F'G = 2a,$$

donc

$$NF' - NF < 2a.$$

D'où il résulte que le point N est hors de l'hyperbole.

Supposons que la tangente doive passer par un point extérieur N. Soit NM la tangente cherchée. En menant les rayons vecteurs MF, MF', et en prenant $MG = MF$; si l'on tire GF, la tangente MN sera perpendiculaire sur le milieu de GF. Le point G est alors déterminé par la rencontre de deux circonférences décrites, l'une du foyer F' avec un rayon égal à $2a$, l'autre du point N avec un rayon égal à NF. Quand on a ainsi obtenu le point G, il suffit de le joindre au point F et d'abaisser la perpendiculaire NM sur cette ligne de jonction; le point de rencontre M de la perpendiculaire avec le prolongement de F'G est le point

de tangence. On voit en effet, par cette construction, que $MG = MF$; par suite, que $F'M - MF = 2a$; enfin, que $F'MH = FMH$.

Lorsque le point N est extérieur à l'hyperbole, on a

$$F'N - NF < 2a,$$

d'où

$$F'N < 2a + FN.$$

On a aussi

$$F'N > F'F - FN; \quad \text{à fortiori}, \quad F'N > 2a - FN.$$

Lorsque FN est plus grand que $2a$, on a

$$F'N > FN - 2a;$$

car $F'N$ est plus grand que FN. On voit donc que la distance des centres des deux cercles est plus petite que la somme, et plus grande que la différence des rayons; et, par conséquent, ces cercles se rencontrent en deux points.

Si le point donné était sur la courbe, la distance des centres étant alors égale à la somme des rayons, les deux cercles se toucheraient extérieurement, et le problème n'aurait plus qu'une solution.

Si le point était intérieur, la distance des centres serait plus grande que la somme des rayons; les circonférences n'auraient, dans ce cas, aucun point commun, et il n'existerait pas de tangente à l'hyperbole.

164. Le point H (*fig.* 92) étant le milieu de FG, et le point A le milieu de FF′, la droite AH est parallèle à F′G, et égale à la moitié de cette dernière ligne. Or,

$$F'G = 2a, \quad \text{donc} \quad AH = a.$$

La tangente MT étant quelconque, on conclut de là que *le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées des foyers sur les tangentes est une circonférence de cercle*

ayant le même centre que l'hyperbole, et pour diamètre le premier axe de cette courbe.

Des diamètres.

165. L'équation d'une corde quelconque telle que GG′ (*fig.* 93), est de la forme

$$y = \delta x + 6.$$

Si on la combine avec celle de la courbe

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

on aura les coordonnées des points G et G′. L'élimination de y donne

$$(a^2\delta^2 - b^2)x^2 + 2a^2\delta 6 x + (6^2 + b^2)a^2 = 0,$$

ou

$$x^2 + \frac{2a^2\delta 6}{a^2\delta^2 - b^2}x + \frac{(6^2 + b^2)a^2}{a^2\delta^2 - b^2} = 0, \qquad (1)$$

équation qui a pour racines les abscisses AP et AP′ des extrémités G, G′, de la corde.

Pour avoir l'abscisse du milieu H de GG′, il faut prendre, comme on sait, la demi-somme des racines de l'équation (1). En nommant x cette abscisse, on aura

$$x = -\frac{a^2\delta 6}{a^2\delta^2 - b^2}.$$

Cette valeur, portée dans l'équation

$$y = \delta x + 6,$$

conduit à

$$y = -\frac{6b^2}{a^2\delta^2 - b^2},$$

pour l'ordonnée du milieu de la corde.

En supposant que, δ restant le même, 6 passe successive-

ment par tous les états de grandeur, on aura une suite indéfinie de cordes toutes parallèles, dont les milieux auront pour coordonnées générales les valeurs précédentes; donc, si on élimine 6 en divisant y par x, l'équation résultante

$$\frac{y}{x} = \frac{b^2}{a^2\delta}, \quad \text{ou} \quad y = \frac{b^2}{a^2\delta}x,$$

sera nécessairement celle du diamètre relatif aux cordes dont le coefficient d'inclinaison est δ.

On voit, comme pour l'ellipse, que *les diamètres de l'hyperbole sont des lignes droites passant par le centre.*

La quantité δ étant susceptible de recevoir toutes les valeurs possibles, de $-\infty$ à $+\infty$, il en résulte que *les droites menées par le centre peuvent être regardées comme des diamètres.*

On doit dire que cette réciproque n'a pas lieu, lorsque $\delta = \pm \frac{b}{a}$. Dans ce cas, l'équation précédente devient

$$y = \pm \frac{b}{a}x,$$

et représente les deux droites qui ont été remarquées comme limites des tangentes. Ces droites ne peuvent pas être des diamètres, car, pour ces valeurs de δ l'équation (1) n'ayant plus qu'une seule racine finie, les lignes parallèles représentées par l'équation

$$y = \delta x + 6,$$

ne rencontrent plus l'hyperbole qu'en un point; elles ne peuvent être des cordes, et conséquemment il n'y a pas de diamètre correspondant.

En représentant l'équation du diamètre par $y = \delta' x$, on suppose

$$\delta' = \frac{b^2}{a^2\delta}.$$

On en déduit entre les tangentes δ, δ', la relation

$$(2) \qquad \delta\delta' = \frac{b^2}{a^2}.$$

Cette relation pourrait être tirée de son analogue dans l'ellipse, en changeant b^2 en $-b^2$. Elle conduit aussi à des conséquences semblables.

1°. En représentant par α la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente menée à l'extrémité du diamètre fait avec l'axe des x, on a entre α et δ' la relation

$$\alpha\delta' = \frac{b^2}{a^2};$$

d'où

$$\alpha\delta' = \delta\delta', \quad \text{et, par suite,} \quad \alpha = \delta.$$

Donc, *les cordes qu'un diamètre divise en parties égales sont parallèles à la tangente menée à l'extrémité de ce diamètre.*

2°. Le produit $\delta\delta'$ ayant pour valeur constante $\frac{b^2}{a^2}$, ne peut devenir égal à -1; donc les axes des coordonnées sont les seuls axes de l'hyperbole, puisqu'il n'existe pas d'autre diamètre perpendiculaire aux cordes correspondantes.

3°. On voit, par la relation $\delta\delta' = \frac{b^2}{a^2}$, que si le diamètre qui a pour équation $y = \delta' x$ divise en deux parties égales les cordes parallèles à celui qui est représenté par $y = \delta x$, réciproquement, celui-ci coupe en parties égales les cordes parallèles à l'autre. Ainsi, la condition suffisante pour que deux diamètres soient conjugués, est $\delta\delta' = \frac{b^2}{a^2}$.

166. Nous allons faire voir que *de deux diamètres conjugués, il n'y en a qu'un seul qui rencontre l'hyperbole.*

Soit $y = \delta x$ l'équation d'un diamètre; en cherchant ses

points d'intersection avec la courbe, on trouve pour les abscisses de ces points,

$$x = \pm \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2 \delta^2}} = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 \delta^2}} = \pm \frac{b}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \delta^2}}.$$

Pour que ces valeurs soient réelles, il faut que δ soit numériquement plus petit que $\frac{b}{a}$. Lorsque cette condition est remplie, le diamètre rencontre l'hyperbole. Or, la relation $\delta\delta' = \frac{b^2}{a^2}$ prouve qu'alors δ' est plus grand que $\frac{b}{a}$. Si on avait pris $\delta > \frac{b}{a}$, on aurait eu $\delta' < \frac{b}{a}$. Dans ce cas, le second diamètre seul aurait rencontré la courbe. Donc, les diamètres qui coupent la courbe ont leurs conjugués parmi ceux qui ne la rencontrent pas.

Si l'on construit sur les axes le rectangle DE D'E' (*fig.* 93), les diamètres qui passent dans les angles DAE, D'AE', font avec l'axe BB' des angles dont les tangentes sont numériquement plus petites que $\frac{b}{a}$; tandis que ceux qui traversent les angles DAD', EAE', font avec ce même axe BB' des angles dont les tangentes sont plus grandes que $\frac{b}{a}$. Les premiers sont donc ceux qui rencontrent la courbe, les seconds ceux qui ne la rencontrent pas.

Des cordes supplémentaires.

167. Quand un diamètre rencontre l'hyperbole, on nomme cordes supplémentaires deux droites menées des extrémités de ce diamètre à un point quelconque de la courbe.

En reprenant les raisonnements et les calculs du n° 129,

Comme il existe deux points N, N', au-dessus de l'axe transverse qui ont la même ordonnée, il y a également deux systèmes de diamètres conjugués qui forment les mêmes angles, et il n'y en a pas davantage.

4°. Les axes de l'hyperbole étant des diamètres conjugués rectangulaires, on les obtient, comme ceux de l'ellipse, en décrivant sur un diamètre quelconque GG' (*fig.* 95) une circonférence de cercle, en tirant les cordes MG, MG', et en leur menant des parallèles BB', DD', par le centre de la courbe.

5°. Enfin, le centre de l'hyperbole s'obtient par la même construction que celui de l'ellipse.

L'hyperbole rapportée à ses diamètres conjugués.

169. Lorsqu'on a l'équation $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ de l'hyperbole rapportée à ses axes, si l'on veut obtenir l'équation de la courbe rapportée aux diamètres conjugués, il faut, comme pour l'ellipse, passer d'un système d'axes rectangulaires à un système d'axes obliques de même origine, et déterminer les nouveaux axes de manière que l'équation ne conserve que les termes affectés des carrés des variables et le terme indépendant. Les formules qu'on doit employer dans la question étant

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\alpha', \quad y = x'\sin\alpha + y'\sin\alpha',$$

on obtiendra d'abord

$$(a^2\sin^2\alpha' - b^2\cos^2\alpha')y'^2 + 2(a^2\sin\alpha\sin\alpha' - b^2\cos\alpha\cos\alpha')x'y' + (a^2\sin^2\alpha - b^2\cos^2\alpha)x'^2 = -a^2b^2.$$

Pour que l'équation ait la forme demandée, il faut poser

$$(1) \qquad a^2\sin\alpha\sin\alpha' - b^2\cos\alpha\cos\alpha' = 0;$$

ce qui réduit l'équation de la courbe à

$$(2) \quad (a^2\sin^2\alpha' - b^2\cos^2\alpha')y'^2 + (a^2\sin^2\alpha - b^2\cos^2\alpha)x'^2 = -a^2b^2.$$

L'hypothèse $y'=0$ donne

$$x'^2=\frac{-a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha-b^2\cos^2\alpha},$$

et la supposition $x'=0$ conduit à

$$y'^2=\frac{-a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha'-b^2\cos^2\alpha'}.$$

Ces valeurs sont nécessairement de signes contraires, car la relation (1) donne

$$a^2\sin^2\alpha\times a^2\sin^2\alpha'=b^2\cos^2\alpha\times b^2\cos^2\alpha',$$

et on reconnaît que si $a^2\sin^2\alpha$ est moindre que $b^2\cos^2\alpha$, il faut, par compensation, que $a^2\sin^2\alpha'$ soit plus grand que $b^2\cos^2\alpha'$, et réciproquement. Donc, des deux nouveaux axes, il n'y en a qu'un seul qui soit rencontré par la courbe; ce qui a été vu précédemment (n° 166).

En prenant pour axe des x' celui qui est rencontré, et en désignant par $2a'$ la partie de cet axe comprise dans l'hyperbole, on aura

$$a'^2=\frac{-a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha-b^2\cos^2\alpha};$$

puisque le carré de y' est négatif, en le désignant par $-b'^2$, on obtiendra

$$b'^2=\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha'-b^2\cos^2\alpha'}.$$

Si l'on remplace les coefficients de y'^2 et de x'^2 par leurs valeurs $\frac{a^2b^2}{b'^2}$, $\frac{-a^2b^2}{a'^2}$, l'équation (2) devient

$$(k)\qquad a'^2y'^2-b'^2x'^2=-a'^2b'^2.$$

Le diamètre qui rencontre la courbe et dont la longueur est ici $2a'$, se nomme le *premier diamètre* ou le diamètre transverse; l'autre sur lequel se comptent les y' se nomme

le *second diamètre*, quoiqu'il ne rencontre pas l'hyperbole; on convient de représenter sa longueur par $2b'$.

170. De l'équation (1) on déduit

$$\tang \alpha . \tang \alpha' = \frac{b^2}{a^2}, \tag{3}$$

et l'on voit qu'en donnant à α une valeur quelconque, on aura toujours pour α' une valeur correspondante; c'est-à-dire que chaque diamètre a son conjugué. Il faut remarquer, toutefois, qu'on ne doit point faire $\tang \alpha = \pm \frac{b}{a}$, puisque alors on n'aurait pas de véritable diamètre (n° 166).

La relation (3) étant semblable à celle qui lie entre elles les directions des cordes supplémentaires, il en résulte que si l'une des cordes est parallèle au premier diamètre, l'autre sera parallèle au second diamètre; on retrouve ainsi ces propriétés connues, que *deux diamètres conjugués sont parallèles à deux cordes supplémentaires*; et réciproquement, que *deux diamètres parallèles à deux cordes supplémentaires sont des diamètres conjugués.*

Dans l'hyperbole équilatère, comme on a $b = a$, on obtient

$$\tang \alpha . \tang \alpha' = 1;$$

c'est-à-dire que les angles α, α', sont compléments l'un de l'autre.

171. Dans l'hyperbole, il y a deux théorèmes analogues à ceux du n° 137, et comme ils se démontrent d'une manière semblable, nous nous bornerons à les énoncer.

Théorème I. — *Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est équivalent au rectangle des axes.*

Théorème II. — *La différence des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est égale à la différence des carrés des axes.*

Cette dernière relation prouve que l'hyperbole ordinaire n'a pas de diamètres conjugués égaux, et que dans l'hyperbole équilatère où $a = b$, tous les systèmes de diamètres conjugués sont des systèmes de diamètres égaux. Ces diamètres égaux font avec l'axe transverse des angles compléments l'un de l'autre.

172. En supprimant les accents des variables x', y', l'équation (k) (page 253) deviendra

$$(k') \qquad a'^2 y^2 - b'^2 x^2 = - a'^2 b'^2.$$

Comme elle est semblable à l'équation relative aux axes, les propriétés indépendantes de l'inclinaison des ordonnées seront communes aux axes de la courbe et à ses diamètres conjugués. Ainsi :

1°. Les carrés des ordonnées parallèles à un second diamètre sont entre eux comme les produits des segments que ces ordonnées déterminent sur le premier.

2°. Selon qu'un point est situé sur l'hyperbole, hors de l'hyperbole ou dans l'hyperbole, la quantité

$$a'^2 y^2 - b'^2 x^2 + a'^2 b'^2$$

est nulle, positive ou négative.

3°. En désignant par α le coefficient angulaire de la tangente, on a

$$\alpha = \frac{b'^2 x'}{a'^2 y'},$$

et pour équation de la tangente :

$$a'^2 y' y - b'^2 x' x = - a'^2 b'^2.$$

Les limites des tangentes ont pour équations

$$y = \pm \frac{b'}{a'} x;$$

d'où l'on déduit qu'elles se confondent avec les diagonales

du parallélogramme construit sur les diamètres conjugués.

La sous-tangente est égale à $\frac{x'^2 - a'^2}{x'}$.

On a entre les valeurs de α et α', relatives à la tangente et au diamètre mené au point de contact, la relation

$$\alpha\alpha' = \frac{b'^2}{a'^2}.$$

4°. Si $y = \delta x + 6$ est l'équation d'une corde quelconque de l'hyperbole, et que $y = \delta' x$ soit celle du diamètre qui passe par les milieux de toutes les cordes parallèles, on aura la relation

$$\delta\delta' = \frac{b'^2}{a'^2},$$

relation qui a lieu aussi pour deux diamètres conjugués dont les équations seraient

$$y = \delta x \quad \text{et} \quad y = \delta' x;$$

et pour deux cordes supplémentaires menées des extrémités d'un diamètre quelconque.

173. Lorsque l'hyperbole est rapportée à deux diamètres conjugués, si l'on veut lui mener une tangente par un point extérieur, on opérera comme pour l'ellipse, et on sera conduit au théorème suivant :

Si de chaque point d'une droite donnée, on mène deux tangentes à une hyperbole, et qu'on joigne les points de contact, on aura des sécantes qui viendront, toutes, se couper en un même point situé sur le diamètre conjugué de celui qui est parallèle à la droite donnée.

La réciproque de ce théorème est vraie; c'est-à-dire que : *Si par un point donné sur le plan d'une hyperbole, on tire différentes sécantes, et que par les points où chaque sécante rencontre la courbe, on mène deux tangentes, le lieu des points d'intersection de ces tangentes, ainsi prises*

deux à deux, sera une droite parallèle au diamètre conjugué de celui qui passe par le point donné.

174. L'équation $a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2$ fait voir que pour décrire une hyperbole quand on connaît deux diamètres coujugués, et l'angle qu'ils font entre eux, il faut décrire une hyperbole sur ces diamètres considérés comme axes, et incliner ensuite les ordonnées sous l'angle connu, sans changer leurs grandeurs.

Des asymptotes.

175. De l'équation

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2,$$

on tire

$$y = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{x^2 - a'^2}.$$

Si, d'après la règle donnée pour obtenir les équations des asymptotes, on prend la racine carrée du premier des deux termes placés sous le radical, on aura les deux équations

$$y = \frac{b'}{a'}x, \quad y = -\frac{b'}{a'}x.$$

On voit par là que les asymptotes coïncident avec les limites des tangentes, et qu'elles ne sont autre chose que les diagonales du parallélogramme DED'E' (*fig.* 96) formé sur deux diamètres conjugués quelconques BB', GG'. Il est évident qu'elles sont aussi les diagonales du rectangle construit sur les axes.

Les côtés DE, D'E', menés par les extrémités du diamètre BB', sont tangents à l'hyperbole; de plus,

$$BD = BE = b'.$$

Donc, la portion de tangente comprise entre les asymptotes a son milieu au point de contact, et elle représente, en

direction et en grandeur, le diamètre conjugué de celui qui passe par ce même point de contact.

Cette propriété fournit le moyen de mener une tangente en un point B de l'hyperbole quand on connaît les asymptotes. En effet, si l'on mène une parallèle BK à l'asymptote AE, et qu'on prenne $KD = AK$, en joignant le point D au point B, on obtiendra la tangente demandée.

On peut aussi, lorsqu'on donne un diamètre BAB' qui rencontre la courbe, déterminer son conjugué : à cet effet, on mène la tangente DE par l'une des extrémités, B, de ce diamètre, puis, par le centre, on conduit la parallèle GG' à DE, et l'on prend

$$AG = AG' = BD.$$

Au reste, cette proposition relative à la tangente n'est qu'un cas particulier du théorème suivant :

Les parties d'une sécante quelconque, comprises entre l'hyperbole et ses asymptotes, sont égales entre elles.

Soit NN' (*fig.* 96) une sécante quelconque; si l'on joint le milieu I de la corde MM' avec le centre, on aura un diamètre de la courbe.

En supposant que ce diamètre rencontre l'hyperbole en B et B', le conjugué sera dirigé suivant la parallèle AY à la sécante. Si l'on mène la tangente DE au point B, comme $BD = BE$, le triangle ANN' donnera

$$IN = IN'.$$

Par suite,

$$IN - IM = IN' - IM',$$

d'où

$$MN = M'N'.$$

La démonstration ne présenterait pas plus de difficulté si le premier diamètre ne rencontrait pas l'hyperbole.

On déduit de ce qui précède un moyen de décrire une

hyperbole quand on connaît les asymptotes et un point M de la courbe.

On mène par ce point une sécante quelconque NMN′ que l'on termine aux asymptotes. En prenant $N'M' = NM$, le point M′ appartient à la courbe. On trouve, de cette manière, autant de points qu'on le veut.

Pour la construction, il est plus commode de ne pas mener toutes les lignes par un seul point M, et de faire servir quelques-uns de ceux qu'on détermine. On évite, ainsi, la confusion qui résulte d'un grand nombre de lignes passant par le même point.

On peut employer le même procédé, quand on connaît deux diamètres conjugués, puisqu'on peut tracer les asymptotes et qu'on a deux points de la courbe.

176. L'équation de l'hyperbole rapportée aux diamètres conjugués BB′, GG′ (*fig.* 96) étant

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2,$$

celle de l'asymptote AN sera

$$y = \frac{b'}{a'}x.$$

Si l'on désigne par y et Y les ordonnées de la courbe et de la droite qui correspondent à la même abscisse AI, on aura

$$Y^2 - y^2 = \frac{b'^2x^2}{a'^2} - \frac{b'^2}{a'^2}(x^2 - a'^2) = b'^2.$$

Or,

$$Y - y = NI - MI = MN,$$

et

$$Y + y = NI + MI = N'I + MI = MN'.$$

Donc, entre les segments MN, MN′ de la sécante NN′, on a

$$MN \times MN' = Y^2 - y^2 = b'^2.$$

Il est clair que si la sécante était parallèle au diamètre $2a'$,

on trouverait de même

$$DO \times D'O = a'^2.$$

Par conséquent, *lorsqu'une sécante à l'hyperbole est parallèle à un diamètre, le rectangle des parties de cette sécante comprises entre un point de la courbe et les asymptotes est égal au carré de la moitié de ce diamètre.* On déduit de là un moyen de trouver deux diamètres conjugués quand on connaît la direction de l'un d'eux AY, les asymptotes et un point de la courbe.

Par le point donné M, on mène, entre les asymptotes, la ligne NMN′ parallèle à AY; et le demi-diamètre AG est moyen proportionnel entre MN et MN′.

Après avoir trouvé AG, on mène la ligne indéfinie AX, par le centre A, et par le milieu I de NN′; on conduit parallèlement à AX la droite GD coupant l'asymptote AN en D. Enfin, on mène parallèlement à AG la droite DB, qu'on termine à AX en B; AB est le demi-diamètre conjugué de AG.

La même propriété peut servir à déterminer les axes quand on connaît deux diamètres conjugués; car, on a un point de la courbe, on peut tracer les asymptotes et avoir la direction des axes en divisant en parties égales les angles des asymptotes. Le reste de la solution n'offre aucune difficulté.

177. En menant par le point B (*fig.* 96) les parallèles BL, BK, aux asymptotes, les deux triangles BAL, BAK, sont égaux. Les triangles BAL, BLE, sont équivalents, puisque AL = LE. Donc le parallélogramme BLAK est équivalent au triangle AEB. Or, ce dernier triangle est la huitième partie du parallélogramme DED′E′, dont la surface est constante quelle que soit la position du point B. Par conséquent, *l'aire du parallélogramme formé par les asymptotes de l'hyperbole et par les parallèles menées à ces droites, d'un point quelconque de la courbe, est constante,*

et égale à la huitième partie du parallélogramme des diamètres conjugués, ou du rectangle des axes.

L'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

178. En prenant pour axe des abscisses l'asymptote inférieure X'AX (*fig.* 97), et pour axe des ordonnées l'asymptote supérieure Y'AY, si d'un point quelconque M de la courbe on mène les coordonnées MP, ML, le parallélogramme APML aura pour surface $xy \sin \theta$, en nommant θ l'angle des asymptotes; or, ce parallélogramme est équivalent à $\frac{ab}{2}$ (n° 177); on a donc pour équation de l'hyperbole rapportée aux asymptotes,

$$xy \sin \theta = \frac{ab}{2}, \quad \text{ou} \quad xy = \frac{ab}{2 \sin \theta}.$$

On peut exprimer $\sin \theta$ en fonction des axes. En effet, si à l'extrémité B de l'axe transverse on élève la perpendiculaire BD terminée à l'asymptote Y'AY, cette perpendiculaire sera égale à b; le triangle rectangle ABD donnera

$$\sin \frac{1}{2} \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \frac{1}{2} \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

et comme

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{1}{2} \theta \,.\, \cos \frac{1}{2} \theta,$$

on obtiendra

$$2 \sin \theta = \frac{4ab}{a^2 + b^2},$$

et, par suite,

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

On peut voir, par la forme de l'équation qu'on vient de trouver, que les axes des coordonnées sont les asymptotes

de la courbe; car on tire de cette équation

$$y = \frac{a^2 + b^2}{4x},$$

et l'on reconnaît qu'en faisant croître x jusqu'à $\pm \infty$, y décroît jusqu'à zéro. Il en est de même de la valeur de x déduite de celle de y.

Lorsqu'on veut trouver l'équation de l'hyperbole rapportée aux asymptotes en partant de l'équation aux axes:

$$(1) \qquad a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2,$$

il faut employer les formules

$$x = x' \cos \alpha + y' \cos \alpha', \quad y = x' \sin \alpha + y' \sin \alpha'.$$

On doit déterminer les valeurs de $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin \alpha'$, $\cos \alpha'$, qui conviennent aux axes qu'on a choisis. Or, si l'on compte toujours les x' sur l'asymptote inférieure AX (*fig.* 97) et les y' sur l'asymptote supérieure AY, l'angle α' sera YAX_1, et l'angle α aura pour valeur $360° - \alpha'$. En élevant au point B la perpendiculaire BD égale à b, le point D sera sur l'asymptote AY, et l'on aura

$$\sin \alpha' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \alpha' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sin \alpha = -\sin \alpha' = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \alpha = \cos \alpha' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Les formules qui serviront à passer des axes aux asymptotes seront

$$x = \frac{a(y' + x')}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = \frac{b(y' - x')}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (1) et supprimant les accents, il viendra

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4},$$

équation de l'hyperbole rapportée aux asymptotes.

Le carré égal à $\frac{a^2+b^2}{4}$ est nommé *puissance* de l'hyperbole. Si l'on représente ce carré par m^2, l'équation devient

$$xy = m^2.$$

179. De l'équation précédente

$$(1) \qquad xy = m^2,$$

on peut revenir à l'équation de la courbe rapportée aux axes. Pour résoudre la question, on emploie les formules

$$x = \frac{x'\sin(\theta-\alpha)-y'\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta}, \quad y = \frac{x'\sin\alpha+y'\cos\alpha}{\sin\theta};$$

θ étant l'angle des asymptotes, et α l'angle que le nouvel axe des x fait avec le premier. Les valeurs de x et de y étant portées dans l'équation (1), conduisent à

$$(2) \quad \left\{\begin{array}{l} x'^2\sin\alpha\sin(\theta-\alpha) \\ +x'y'[\cos\alpha\sin(\theta-\alpha)-\sin\alpha\cos(\theta-\alpha)] \\ -y'^2\cos\alpha\cos(\theta-\alpha) = m^2\sin^2\theta. \end{array}\right.$$

Pour que les nouveaux axes soient ceux de l'hyperbole, il faut que le terme en $x'y'$ disparaisse. En égalant à zéro le coefficient de ce terme qui renferme l'angle indéterminé α, on a

$$\cos\alpha\sin(\theta-\alpha)-\sin\alpha\cos(\theta-\alpha) = 0,$$

ou

$$\sin(\theta-2\alpha) = 0,$$

équation de laquelle on déduit

$$\alpha = \frac{\theta}{2}.$$

L'équation (2) devient alors

$$(3) \qquad x'^2\sin^2\frac{\theta}{2} - y'^2\cos^2\frac{\theta}{2} = m^2\sin^2\theta$$

Pour déterminer les grandeurs des axes, on fera successivement

$$y'=0, \quad x'=0,$$

ce qui donnera

$$x'^2=\frac{m^2\sin^2\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}, \quad y'^2=-\frac{m^2\sin^2\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}};$$

ou

$$x'^2=4m^2\cos^2\frac{\theta}{2}, \quad y'^2=-4m^2\sin^2\frac{\theta}{2},$$

en remplaçant $\sin\theta$ par $2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$.

Si l'on fait

$$4m^2\cos^2\frac{\theta}{2}=a^2, \quad \text{et} \quad -4m^2\sin^2\frac{\theta}{2}=-b^2,$$

on obtiendra

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{a^2}{4m^2}, \quad \sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{b^2}{4m^2};$$

en mettant ces valeurs dans l'équation (3) et en observant que

$$\sin^2\theta=4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2},$$

on trouvera facilement

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2,$$

équation de l'hyperbole rapportée à son centre et à ses axes.

180. Si l'on désigne par x', y', les coordonnées d'un point donné M (*fig.* 97) de la courbe, l'équation d'une sécante quelconque SMM', passant par ce point et par un point M' ayant pour coordonnées x'', y'', sera de la forme

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x').$$

Les équations qui expriment que les deux points appar-

tiennent à la courbe sont

$$x'y' = m^2, \quad x''y'' = m^2;$$

en les retranchant l'une de l'autre, il vient

$$x'y' - x''y'' = 0,$$

ou

$$x'(y' - y'') + y''(x' - x'') = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{y''}{x'}.$$

Ce qui donne pour l'équation de la sécante :

$$(1) \qquad y - y' = -\frac{y''}{x'}(x - x').$$

Si l'on veut que cette ligne devienne tangente, on fera

$$y'' = y', \quad x'' = x',$$

et l'on aura

$$y - y' = -\frac{y'}{x'}(x - x'),$$

équation qui revient à

$$(2) \qquad x'y + y'x = 2m^2,$$

lorsqu'on fait disparaître le dénominateur x', et qu'on remplace $2x'y'$ par $2m^2$.

En faisant $y = 0$, dans l'équation (2) de la tangente, on trouve

$$x = AT' = \frac{2x'y'}{y'} = 2x' = 2AP.$$

On voit par là : 1°. que la sous-tangente PT' est égale à l'abscisse AP du point de contact ; 2°. que la portion TT' de tangente comprise entre les asymptotes est divisée en deux parties égales au point de tangence. (Proposition connue, n° 175.)

Revenons à l'équation (1) de la sécante, et faisons $y = 0$, nous aurons

$$x - x' = \mathrm{PS}' = \frac{x'y'}{y''} = \frac{x''y''}{y''} = x'' = \mathrm{AP}'.$$

Si l'on mène ML parallèle à AX, les triangles S′M′P′, MLS seront égaux, et l'on en déduira

$$\mathrm{M'S'} = \mathrm{MS};$$

résultat déjà trouvé (n° 175).

181. Prenons le diamètre quelconque D′AD (*fig.* 98), et menons les deux cordes supplémentaires MD, MD′. Soient y', x', les coordonnées de l'extrémité D; celles de l'autre extrémité D′ seront $-y'$, $-x'$. En nommant y, x, les coordonnées du point M, les coefficients angulaires α, α' des cordes MD, MD′, seront respectivement

$$\alpha = \frac{y - y'}{x - x'}, \quad \alpha' = \frac{y + y'}{x + x'}.$$

On aura de plus

$$xy = m^2, \quad x'y' = m^2;$$

d'où l'on tire successivement

$$xy = x'y', \quad \frac{y}{y'} = \frac{x'}{x}, \quad \frac{y - y'}{y + y'} = \frac{x' - x}{x' + x},$$

$$\frac{y - y'}{x' - x} = \frac{y + y'}{x + x'}, \quad \left(\frac{y - y'}{x - x'}\right) = -\left(\frac{y + y'}{x + x'}\right).$$

Donc,

$$\alpha = -\alpha';$$

c'est-à-dire que *les coefficients d'inclinaison de deux cordes supplémentaires de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes sont égaux et de signes contraires.*

182. En représentant toujours par x', y', les coordonnées du point de contact, le coefficient angulaire de la tan-

gente est $-\frac{y'}{x'}$, et celui du diamètre mené au point de contact est $\frac{y'}{x'}$; si l'on porte ces valeurs dans la formule

$$\operatorname{tang} V = \frac{(a'-a)\sin\theta}{1+aa'+(a+a')\cos\theta},$$

on aura (*fig.* 97)

$$\operatorname{tang} AMT' = \frac{\frac{-2y'\sin\theta}{x'}}{1-\frac{y'^2}{x'^2}} = \frac{-2y'x'\sin\theta}{x'^2-y'^2} = \frac{-2m^2\sin\theta}{x'^2-\frac{m^4}{x'^2}},$$

en remplaçant y'^2 par $\frac{m^4}{x'^2}$; donc,

$$\operatorname{tang} AMT' = \frac{-2m^2x'^2\sin\theta}{x'^4-m^4}.$$

Pour trouver les points de l'hyperbole où l'angle AMT' est droit, on fait

$$x'^4-m^4=0\,;$$

les valeurs réelles de x' sont $\pm m$, et celles de y' sont aussi $\pm m$. Ces coordonnées déterminent les deux sommets de l'hyperbole.

183. Selon qu'un point est sur l'hyperbole, hors de l'hyperbole, ou dans l'hyperbole, la quantité m^2-xy est nulle, positive ou négative; la réciproque est vraie. En effet :

1°. Quand le point est sur la courbe, $m^2-xy=0$;

2°. Quand le point est hors de la courbe, en N (*fig.* 98) par exemple, l'abscisse AP étant égale à celle du point M, et l'ordonnée NP étant plus petite que PM, on a

$$m^2-xy>0.$$

Si le point était situé dans l'un des angles YAX', Y'AX,

les deux coordonnées seraient de signes contraires, et, par suite, $m^2 - xy$ serait positif;

3°. Lorsque le point est dans l'intérieur de la courbe, en N′, l'ordonnée N′P est plus grande que MP, l'abscisse AP est celle du point M, donc

$$m^2 - xy < 0.$$

184. Si l'on veut mener une tangente par un point extérieur (x'', y''), on observera qu'en représentant par x', y', les coordonnées du point de contact, l'équation de la tangente est

$$x'y + y'x = 2m^2.$$

Pour obtenir les coordonnées x', y', on a les équations

$$y''x' + x''y' = 2m^2,$$

$$x'y' = m^2.$$

L'élimination de y' entre ces deux équations conduit à

$$x' = \frac{m^2 \pm m\sqrt{m^2 - x''y''}}{y''}.$$

Selon que $m^2 - x''y''$ est positif, nul ou négatif, les valeurs de x' sont réelles et inégales, réelles et égales, ou imaginaires; et le point (x'', y'') est hors de l'hyperbole, ou sur la courbe, ou intérieur. Dans le premier cas, on peut mener deux tangentes; dans le deuxième, une seule; et dans le troisième, on n'en peut mener aucune.

185. En prenant toujours l'équation $xy = m^2$; en désignant par θ l'angle des asymptotes, et par x', y', les coordonnées d'un point de l'hyperbole, l'équation de la normale est

$$y - y' = \frac{y'\cos\theta - x'}{x'\cos\theta - y'}(x - x'),$$

ou, en remplaçant y' par sa valeur $\frac{m^2}{x'}$,

$$y - y' = \frac{m^2 \cos\theta - x'^2}{x'^2 \cos\theta - m^2}(x - x')$$

On pourra, d'après ce qui précède, déterminer les normales qui passent par un point extérieur donné.

Quadrature de l'hyperbole.

186. Considérons d'abord l'hyperbole équilatère dont la puissance est l'unité; l'équation de la courbe rapportée à ses asymptotes sera

$$xy = 1.$$

En prenant l'abscisse AC $= 1$ (*fig.* 99), et une abscisse quelconque AP $= x$, nous allons évaluer la surface BCPM comprise entre l'hyperbole, l'asymptote AX, et les ordonnées BC, MP. Après avoir divisé CP en un nombre quelconque de parties, élevons aux points de division les ordonnées C′B′, C″B″, etc., et construisons les rectangles BCC′D, B′C′C″D′, etc.

Lorsque les distances CC′, C′C″, etc., diminuent, la somme des rectangles va en décroissant, et se rapproche de l'aire BCMP qui est la limite de cette somme de rectangles; c'est donc cette limite qu'il faut déterminer.

Les abscisses

$$AC,\quad AC',\quad AC'',\ldots,\quad AP,$$

étant désignées par

$$1,\quad x',\quad x'',\ldots,\quad x,$$

les ordonnées sont

$$1,\quad \frac{1}{x'},\quad \frac{1}{x''},\ldots,\quad \frac{1}{x};$$

donc :

$$\text{rectangle } CBDC' = CC' \times CB = (x' - 1) \times 1 = (x' - 1),$$

$$\text{rectangle } C'B'D'C'' = C'C'' \times C'B' = (x'' - x') \times \frac{1}{x'} = \frac{x''}{x'} - 1,$$

$$\text{rectangle } C''B''D''C''' = C''C''' \times C''B'' = (x''' - x'') \times \frac{1}{x''} = \frac{x'''}{x''} - 1,$$

et ainsi de suite.

Les points C', C'', etc., pouvant être pris tout à fait arbitrairement, il est permis de supposer les abscisses 1, x', x'', x''', etc., en progression géométrique; comme le premier terme est 1 et le second x', la raison sera x', et l'on aura

$$x'' = x'^2, \quad x''' = x'^3, \text{ etc.}$$

De sorte que si l'on suppose qu'il y ait n divisions de C en P, on a pour la dernière abscisse $x = x'^n$, et tous les rectangles sont égaux à $x' - 1$.

En ajoutant d'abord les deux premiers, ensuite les trois premiers, puis les quatre premiers, et procédant toujours de la même manière, les sommes seront

$$2(x' - 1), \quad 3(x' - 1), \quad 4(x' - 1), \text{ etc.}$$

Alors, les abscisses étant

$$1, \quad x', \quad x'^2, \quad x'^3, \ldots, \quad x'^n \text{ ou } x,$$

les espaces rectangulaires compris entre la première ordonnée CB et chacune des ordonnées CB, C'B', etc., seront

$$0, \quad (x' - 1), \quad 2(x' - 1), \quad 3(x' - 1), \ldots, \quad n(x' - 1).$$

On écrit 0 parce que l'on considère la surface comprise entre BC et cette ordonnée elle-même.

On voit que les abscisses forment une progression géométrique commençant par l'unité, et les aires correspondantes, une progression arithmétique qui commence par

zéro. Il résulte de là que les aires rectangulaires comprises entre BC et les ordonnées BC, B'C', etc., sont les logarithmes des abscisses auxquelles correspondent ces ordonnées.

Cette proposition étant indépendante du nombre des divisions faites sur CP, doit être vraie dans le cas où ce nombre est infini; c'est-à-dire dans le cas où, au lieu de passer du point C au point P par un nombre fini d'abscisses, on passerait par toutes les abscisses intermédiaires. Mais, comme alors les aires rectangulaires ne seraient autre chose que les aires hyperboliques, comprises entre CB et les ordonnées correspondantes à ces abscisses, on est conduit au théorème suivant :

Les aires hyperboliques telles que BCMP, *sont les logarithmes des abscisses correspondantes* AP.

Il faut actuellement déterminer la base du système dans lequel se prennent ces logarithmes; ce qui revient à trouver un nombre tel, qu'en l'élevant à la puissance marquée par l'une de ces aires, on ait pour résultat l'abscisse correspondante.

Si l'on reprend, dans les progressions précédentes, les termes correspondants x et $n(x'-1)$, dont le second représente la somme des rectangles compris entre BC et MP, en faisant $n=\infty$, cette somme doit devenir égale à l'espace hyperbolique BCMP. On posera donc

$$(1) \qquad \mathrm{E}^{n(x'-1)}=x, \quad \text{ou} \quad \mathrm{E}^{n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)}=x,$$

et l'on cherchera la valeur de E qui répond à la valeur $n=\infty$. On aura de cette manière la base demandée.

Cette valeur de E devant être indépendante de x, on choisira pour x la valeur qui rend l'exposant de E égal à 1, lorsqu'on fait $n=\infty$. Or, l'équation

$$n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)=1,$$

donne

$$(2)\qquad x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

en développant cette puissance, on obtient

$$x = 1 + \frac{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$+ \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots,$$

$$= 2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3n}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3n}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4n}\right) + \ldots.$$

On démontre en algèbre que cette valeur de x, lorsque n augmente indéfiniment, se rapproche de plus en plus de

$$(3)\qquad x = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{1}{2.3.4\ldots n},$$

et qu'on peut donner à n une valeur assez grande pour que la différence des valeurs de x déterminées par les formules (2) et (3) devienne moindre que tout nombre donné, quelque petit qu'il soit. Par conséquent, x est la limite de la série convergente représentée par le second membre de l'équation (3); cette limite comprise entre 2 et 3 a une valeur incommensurable qui peut être obtenue à tel degré d'approximation qu'on voudra; on la représente par e, ainsi c'est le nombre e qui est la base du système dans lequel il faut prendre les logarithmes des abscisses AP pour avoir les aires hyperboliques telles que BCPM.

Ces logarithmes sont ceux que Néper, inventeur des logarithmes, considéra d'abord; et on leur donne, pour cette raison, le nom de *népériens*. Nous les désignerons par la lettre l, et nous écrirons conséquemment

$$\text{aire BCPM} = lx.$$

La formule précédente donne aussi les aires qui répon-

dent aux abscisses moindres que AC, pourvu que l'on regarde comme négatives les aires qui, comme HCBG, sont situées à gauche de BC. En effet, si l'on mène les perpendiculaires BL, GK sur AY, on aura

$$\text{BGKL} = ly,$$

puisque tout est semblable pour chaque asymptote. Or,

$$\text{BGHC} = \text{BLAC} + \text{BGKL} - \text{KGHA};$$

et, à cause de $xy = 1$, on a

$$\text{BLAC} = \text{KGHA};$$

donc,

$$\text{BGHC} = \text{BGKL} = \log y = \log \frac{1}{x} = -\log x.$$

On n'a considéré jusqu'à présent que l'hyperbole équilatère représentée par l'équation

$$xy = 1.$$

Supposons généralement que les asymptotes fassent entre elles un angle YAX égal θ (*fig.* 100), et qu'on ait l'équation

$$xy = m^2.$$

Après avoir mené AY′ perpendiculaire sur AX, concevons qu'on ait décrit, en prenant les asymptotes rectangulaires AX, AY′, l'hyperbole équilatère qui a pour équation

$$xy = 1.$$

Soient $AC = 1$ et $AP = x$; si l'on mène les ordonnées correspondantes des deux hyperboles, et si l'on représente par S et s les surfaces BCPM, B′CPM′, on démontrera facilement, par un raisonnement semblable à celui du n° 142 (page 225), que

$$\frac{S}{s} = \frac{m^2 \sin\theta}{1}, \quad \text{d'où} \quad S = m^2 \sin\theta \, . \, lx.$$

Il est permis de regarder la surface S comme étant le logarithme de x, mais il faut alors prendre les logarithmes dans un système qui aurait pour module $m^2 \sin\theta$.

CHAPITRE ONZIÈME.

DE LA PARABOLE.

Parabole rapportée à son axe.

187. En prenant des axes rectangulaires et en exécutant une double transformation de coordonnées, on a vu (n° 99) que l'équation d'une parabole peut toujours se ramener à la forme

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

Dans l'examen des propriétés de cette courbe, il est permis de supposer p positif; car, si l'on avait

$$y^2 = -2px,$$

il suffirait de compter dans un sens opposé les x positifs, pour changer cette équation en

$$y^2 = 2px.$$

On voit immédiatement, par cette équation, que l'origine est un point de la courbe, puisque $x = 0$ donne $y = 0$. La même équation prouve encore que la ligne des x est un axe de la courbe; car, pour chaque abscisse on a deux ordonnées égales et de signes contraires, et les coordonnées sont rectangulaires. Cet axe est le seul qui existe dans la parabole.

L'équation (1) conduisant à $y = \pm\sqrt{2px}$, on reconnaît sur-le-champ que la courbe ne s'étend pas du côté des x négatifs, puisque x négatif rend y imaginaire. Si x augmente de zéro à $+\infty$, y croît aussi jusqu'à $\pm\infty$; donc, la

parabole s'étend à partir de l'origine jusqu'à l'infini, d'une manière symétrique au-dessus et au-dessous de l'axe des x. On sait déjà qu'elle doit toujours être concave vers cet axe, comme l'indique la *fig.* 101.

La parabole n'a qu'un *sommet* qui est le point A (*fig.* 101) où elle est rencontrée par son axe Le coefficient, $2p$ de x, par lequel une parabole diffère d'une autre parabole, est nommé *paramètre*. D'après l'équation de la courbe, le rapport du carré de l'ordonnée à l'abscisse correspondante étant constant, il en résulte que *dans la parabole les carrés des ordonnées perpendiculaires à l'axe sont entre eux comme les distances du sommet aux pieds de ces ordonnées.*

188. Lorsqu'un point est sur la parabole, on a entre ses coordonnées la relation $y^2 - 2px = 0$. Si l'on prend un point extérieur H (*fig.* 101), et qu'on mène sur AX la perpendiculaire HP, qui rencontre la parabole en M, l'ordonnée du point H étant plus grande que celle du point M, on devra avoir

$$y^2 - 2px > 0.$$

On démontrerait de la même manière que pour un point intérieur H′, on a

$$y^2 - 2px < 0.$$

On a donc

$$y^2 - 2px = 0,$$

sur la parabole;

$$y^2 - 2px > 0,$$

hors de la parabole;

$$y^2 - 2px < 0,$$

dans la parabole.

189. L'équation, $y^2 = 2px$, de la parabole permet de décrire la courbe de la manière suivante : Après avoir pris une abscisse AP (*fig.* 101), on porte à gauche du sommet,

sur l'axe, une longueur $AG = 2p$; sur GP comme diamètre, on décrit une demi-circonférence qui rencontre l'axe AY au point D. On élève au point P l'ordonnée PM qu'on termine à la droite DM parallèle à AX. Le point M appartient à la parabole. En effet, on a par construction :

$$PM = AD, \quad \overline{AD}^2 = AG \times AP,$$

et, par conséquent,

$$\overline{PM}^2 = 2p.AP.$$

190. On a vu que, dans le cas où l'équation du second degré représente une courbe, cette courbe a un centre déterminé par les équations

$$2Ab + Ba + D = 0, \quad 2Ca + Bb + E = 0,$$

si $B^2 - 4AC$ est différent de zéro. Mais, lorsque $B^2 - 4AC$ est égal à zéro, le centre est situé à l'infini. Nous allons faire voir directement qu'on peut regarder la parabole comme une ellipse, ou une hyperbole, dont le grand axe, ou l'axe transverse, est infiniment allongé.

Prenons l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, d'une ellipse dont un des sommets A (*fig.* 102) est à l'origine. La distance AF égale $a - \sqrt{a^2 - b^2}$. Appelons $\frac{p}{2}$ cette distance, nous aurons

$$\frac{p}{2} = a - \sqrt{a^2 - b^2},$$

équation d'où l'on tire

$$b^2 = ap - \frac{p^2}{4},$$

et, par conséquent,

$$y^2 = \left(p - \frac{p^2}{4a}\right)\left(2x - \frac{x^2}{a}\right).$$

Actuellement, si l'on suppose que les points A, F, restant

fixes, l'axe $2a$ augmente, on trouvera une suite d'ellipses dont les ordonnées tendront vers celles de la parabole SAS′ (*fig.* 102), représentée par l'équation

$$y^2 = 2px;$$

puisque les termes $\frac{p^2}{4a}$, $\frac{x^2}{a}$, convergeront vers zéro. Donc, la parabole SAS′ est la limite des ellipses qui ont un même sommet A, et un même foyer F.

Si l'on construit de même une suite d'hyperboles ayant A pour sommet et F pour foyer, et dont le centre, situé du côté des abscisses négatives, s'éloigne de plus en plus de l'origine, on trouvera encore que ces hyperboles ont pour limite la parabole SAS′.

On pourra donc dire que la parabole est une ellipse, ou une hyperbole, dont le grand axe, ou l'axe transverse, est infini.

Du foyer et de la directrice.

191. Les coordonnées étant rectangulaires, et l'équation de la parabole étant $y^2 = 2px$, on nomme *foyer* un point dont la distance à un point quelconque de la parabole est une fonction rationnelle de l'abscisse de ce dernier point.

Si l'on considère une suite d'ellipses ayant un sommet A (*fig.* 102) et un foyer F communs, la distance de ce foyer à un point quelconque M, de chacune de ces courbes, sera une fonction rationnelle de l'abscisse OP comptée à partir du centre, et sera aussi une fonction rationnelle de l'abscisse AP comptée à partir du sommet, puisque $OP = AP - AO$. Or, la parabole est la limite de toutes ces ellipses, la distance du point F à chaque point de cette courbe sera donc une fonction rationnelle de l'abscisse de ce point. D'une autre part, AF est représentée par

$\frac{p}{2}$, et le paramètre de la parabole est $2p$: cette courbe a donc un foyer situé sur son axe à une distance du sommet égale au quart du paramètre.

192. Pour déterminer directement le foyer de la parabole, on peut opérer comme pour les deux autres courbes. Désignant par x', y', les coordonnées du foyer demandé; par x, y, celles d'un point quelconque de la parabole, et par δ la distance de ces deux points, on aura

$$\begin{aligned}\delta^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 \\ &= x^2 - 2x'x + x'^2 + y^2 - 2y'y + y'^2.\end{aligned}$$

De l'équation de la parabole, on tire

$$y = \sqrt{2px},$$

ce qui conduit à

$$\delta^2 = x^2 - 2x'x + x'^2 + 2px + 2y'\sqrt{2px} + y'^2.$$

Donc, pour que δ^2 soit une fonction rationnelle de x, il faut que $y' = 0$; supposition qui donne

$$\delta^2 = x^2 - 2x'x + x'^2 + 2px = x^2 + 2(p - x')x + x'^2.$$

Comme δ doit être une fonction rationnelle de x, il faut qu'on ait

$$(p - x')^2 = x'^2;$$

d'où l'on tire

$$x' = \frac{p}{2}.$$

Il résulte de là que la parabole n'a qu'un foyer situé sur l'axe à une distance du sommet, égale au quart du paramètre.

193. En remplaçant x' par $\frac{p}{2}$, on a

$$\delta = x + \frac{p}{2}.$$

Si l'on prend $AB = AF = \frac{p}{2}$ (*fig.* 101), et qu'on élève BL perpendiculaire sur BX, le point F sera le foyer de la parabole, et BL en sera la *directrice*. Ensuite, si l'on mène d'un point quelconque, M, de cette courbe, le rayon vecteur FM, et les perpendiculaires MP, MI sur AX et BL, on aura

$$FM = x + \frac{p}{2} = AP + AB = MI.$$

D'où il résulte que *chaque point de la parabole est également éloigné du foyer et de la directrice.*

Quand un point N est extérieur à la parabole, en menant NI, perpendiculaire à la directrice, et prolongeant NI jusqu'à sa rencontre M avec la courbe, si l'on joint le foyer F aux points M, N; on aura

$$NF + NM > MF \quad \text{et} \quad MF = MI = NI + NM;$$

donc

$$NF + NM > NI + NM, \quad \text{ou} \quad NF > NI.$$

Pour un point intérieur N', on a

$$N'F < N'M + MF.$$

Or,

$$N'M + MF = N'M + MI = N'I;$$

par conséquent,

$$N'F < N'I.$$

Donc, *selon qu'un point est sur la parabole, ou hors de la courbe, ou intérieur à la courbe, sa distance au foyer est égale à sa distance à la directrice, ou plus grande, ou plus petite.*

194. On peut facilement construire une parabole dont on connaît le paramètre $2p$. Après avoir pris $AB = AF = \frac{p}{2}$ (*fig.* 101), on mène la directrice BL, et, par un point quel-

conque P de l'axe, on élève la perpendiculaire PH; puis, du point F comme centre, avec BP pour rayon, on décrit un arc de cercle qui coupe PH aux points M et M'; ces points appartiennent à la parabole, puisqu'ils sont également distants du foyer F et de la directrice BL.

Pour décrire la parabole d'un mouvement continu, on place contre la directrice BL une équerre mobile EQR; on prend un fil d'une longueur égale à QR, en attachant une de ses extrémités en R, et l'autre au foyer F. Si l'on tend ce fil par le moyen d'un style appliqué contre QR, et si l'on fait glisser l'équerre le long de la directrice, le style décrira la parabole. En effet, on aura toujours

$$FC + CR = QC + CR,$$

d'où

$$FC = QC.$$

Donc, le point C appartient à la parabole.

195. La propriété dont jouit la parabole, d'avoir chacun de ses points également distant du foyer et de la directrice, caractérise cette courbe. Pour le prouver, nous résoudrons le problème suivant :

Trouver une courbe telle, que chacun de ses points soit également distant d'un point donné F *et d'une droite donnée* BL (fig. 101).

Menons FBX perpendiculaire à BL, et, par le point A milieu de FB, élevons AY perpendiculaire à AX. La courbe demandée sera symétrique par rapport à AX, et passera par le point A. Pour cette raison, nous prendrons les lignes AX, AY, pour axes des coordonnées. Soient M un point quelconque de la courbe; AP son abscisse; MP son ordonnée. Menons la perpendiculaire MI sur BL, et faisons

$$AF = \frac{p}{2}, \quad AP = x, \quad MP = y.$$

Nous aurons

$$\overline{\mathrm{MF}}^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2, \quad \text{et} \quad \mathrm{MI} = x + \frac{p}{2}.$$

Comme il faut que MF = MI, il viendra

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2;$$

d'où l'on tire, toutes simplifications faites,

$$y^2 = 2px.$$

Nous ferons remarquer que cette question est le cas du problème (n° **112**, page 180) où l'on suppose $m = n$.

De la tangente et de la normale.

196. En menant une sécante par deux points ayant pour coordonnées x', y'; x'', y'', l'équation de cette sécante sera de la forme

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x');$$

si l'on exprime que les deux points sont sur la courbe, en écrivant

$$y'^2 = 2px', \quad y''^2 = 2px'',$$

on aura d'abord

$$y'^2 - y''^2 = 2p(x' - x''),$$

d'où

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{2p}{y' + y''},$$

et, par suite,

$$y - y' = \frac{2p}{y' + y''}(x - x')$$

pour l'équation de la sécante.

Lorsque le second point se confond avec le premier, on a

$$x'' = x', \quad y'' = y';$$

la sécante devient tangente, et l'on obtient pour équation de cette dernière droite,

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x');$$

ou, en observant que $y'^2 = 2px'$,

$$y'y = p(x + x').$$

Si l'on double les deux membres de cette dernière équation, et si on la retranche de l'équation $y'^2 = 2px'$, on a

$$y'^2 - 2y'y = -2px;$$

en ajoutant y^2 de part et d'autre, il vient

$$(y - y')^2 = y^2 - 2px.$$

La quantité $y^2 - 2px$ restant positive pour tous les points de la tangente, excepté pour celui dont l'ordonnée est y', il en résulte que tous ces points sont extérieurs à la parabole.

Si l'on représente par α le coefficient angulaire de la tangente, on a

$$\alpha = \frac{p}{y'}.$$

L'hypothèse $y' = 0$ donne

$$\alpha = \infty;$$

donc, la tangente au sommet est perpendiculaire à l'axe.

Si l'on fait croître y' jusqu'à l'infini positif, α décroît jusqu'à zéro. Donc, la tangente approche de plus en plus de devenir parallèle à l'axe.

197. Pour déterminer le point T (*fig.* 103) où la tangente rencontre l'axe des x, il faut faire $y = 0$, dans l'équation de cette ligne, ce qui donne

$$x = -x'.$$

On voit par là que le point T est du côté des abscisses né-

gatives, à une distance AT de l'origine, égale à l'abscisse AP du point de contact. On reconnaît, de même, que la sous-tangente PT $= 2x'$. Donc, *dans la parabole, la sous-tangente est double de l'abscisse du point de tangence.* Ce qui fournit une construction simple de la tangente.

198. Si l'on veut mener une tangente par un point extérieur ayant pour coordonnées x'', y'', on remarquera que l'équation de la ligne cherchée est

$$y'y = p(x + x');$$

x', y', étant les coordonnées du point de contact. Pour trouver ces coordonnées, on exprimera : 1°. que le point x', y', est sur la courbe; 2°. que la tangente passe par le point qui a pour coordonnées x'', y''. On sera conduit aux deux équations

$$y'^2 = 2px', \quad y''y' = p(x' + x''),$$

desquelles on tirera facilement

$$y' = y'' \pm \sqrt{y''^2 - 2px''}, \quad x' = \frac{y''^2 - px'' \pm y''\sqrt{y''^2 - 2px''}}{p}.$$

Ces valeurs substituées dans l'équation $y'y = p(x + x')$ résoudraient le problème proposé.

Lorsque le point donné est hors de la parabole, la quantité $y''^2 - 2px''$ est positive, et les deux valeurs de y' sont réelles et inégales, ainsi que celles de x'. Il y a alors deux tangentes.

Quand le point donné est sur la courbe, les deux valeurs de x' se réduisent à une seule, aussi bien que celles de y', et il n'y a plus qu'une seule tangente.

Enfin, quand le point donné est intérieur, les valeurs de x' et de y' étant imaginaires, il n'existe plus de tangente.

199. Cherchons l'équation de la normale à la parabole

au point dont les coordonnées sont x', y'. Cette équation doit être de la forme

$$y - y' = \alpha'(x - x').$$

Et, comme la normale est perpendiculaire à la tangente, on doit avoir

$$\alpha' = -\frac{1}{\alpha} = -\frac{y'}{p};$$

ce qui donne pour l'équation demandée,

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x').$$

En faisant $y = 0$ dans cette équation, et en prenant la valeur de $x - x'$, on trouve pour la sous-normale (*fig.* 103),

$$\text{PN} = x - x' = p.$$

Donc, *dans la parabole la sous-normale est constante et égale à la moitié du paramètre.*

200. Proposons-nous de mener une normale par un point N′ (*fig.* 103) donné sur le plan de la courbe. Soient x'', y'', les coordonnées de ce point; si l'on représente par x', y', celles du point de contact, on sait que l'équation de la normale est

$$y - y' = \frac{-y'}{p}(x - x').$$

Il s'agit de déterminer x', y'. Pour y parvenir, on remarquera que la normale devant passer par le point N′, on doit avoir

$$(1) \qquad y'' - y' = \frac{-y'}{p}(x'' - x'),$$

et comme le point x', y', est sur la courbe, on a encore la relation

$$(2) \qquad y'^2 = 2px'.$$

L'élimination de x' entre les équations (1) et (2) conduit à

$$(3) \qquad y'^3 + 2p(p - x'')y' - 2p^2y'' = 0.$$

L'équation (3) doit avoir une racine réelle de même signe que y'', et par conséquent le problème a au moins une solution.

Si le point donné était sur l'axe, on aurait

$$y'' = 0,$$

l'équation (3) deviendrait alors

$$y'^3 + 2p(p - x'')y' = 0;$$

elle aurait une racine nulle, à laquelle correspondrait une valeur nulle pour x'; le point ainsi déterminé serait le sommet de la parabole, et, par conséquent, on aurait pour normale l'axe de cette courbe.

En divisant la dernière équation par y', on en déduirait ensuite

$$y' = \pm\sqrt{2p(x'' - p)}.$$

Si la différence $x'' - p$ était positive, on aurait deux autres solutions du problème.

On voit facilement que quand $x'' - p$ est nulle ou négative, l'équation ne fournit que la première solution trouvée; c'est-à-dire qu'on ne peut mener qu'une seule normale.

En regardant x', y', comme des variables dans les équations (1) et (2), on voit que la seconde représente la parabole donnée, et l'autre une hyperbole passant par le point N'. L'équation de cette hyperbole revient à

$$x'y' + (p - x'')y' - py'' = 0;$$

la courbe a pour asymptotes l'axe des x, et une parallèle à l'axe des y dont l'équation est

$$x' = x'' - p.$$

La construction de l'hyperbole n'offre aucune difficulté, puisqu'on a les asymptotes et un point.

Le nombre des solutions du problème proposé est égal au nombre des points communs aux deux courbes.

201. Le point F (*fig.* 103) étant le foyer de la parabole, on a vu que $AF = \frac{p}{2}$, et $FM = x + \frac{p}{2}$. Pour la tangente MT au point M, on a reconnu que $AT = x$; par conséquent, $TF = x + \frac{p}{2}$; donc FM = TF, et, par suite, l'angle TMF = FTM. Il résulte de là que dans la parabole, la tangente fait des angles égaux avec l'axe, et avec le rayon vecteur mené au point de contact.

En menant une parallèle MK à l'axe, l'angle

$$\text{RMK} = \text{MTF} = \text{FMT}.$$

On peut donc encore dire que *la tangente fait des angles égaux avec le rayon vecteur et avec la parallèle à l'axe, menée par le point de contact.*

On reconnaît ici un théorème analogue à celui du n° 124, et qui devait résulter de ce que la parabole est une ellipse dont un des foyers est situé à l'infini.

On déduit de ce qui précède un moyen de mener une tangente à la parabole par un point donné.

Supposons d'abord que ce point soit en M (*fig.* 103) sur la courbe. On conduira le rayon vecteur FM, on prendra FT = FM, et l'on mènera la ligne MT qui sera la tangente demandée.

Pour démontrer à posteriori que la ligne MT est tangente, on mène MG parallèle à l'axe jusqu'à la rencontre de la directrice en G; on joint ce dernier point au point F. Par la nature de la courbe, on a

$$\text{MG} = \text{MF},$$

et, d'après la construction,

$$\text{GMT} = \text{TMF};$$

donc MT est perpendiculaire sur le milieu de GF. Actuellement, si d'un point quelconque S pris sur MT, on mène la droite SF au foyer, et la ligne SH perpendiculaire à la directrice, et qu'on joigne SG, on aura

$$SH < SG; \quad \text{par suite,} \quad SH < SF.$$

Donc, chaque point de MT, excepté le point M, est extérieur à la parabole.

Lorsque la tangente doit être menée par un point S, pris hors de la parabole, on observe que si le point M est le point de contact demandé, et MT la tangente : en joignant MF, et en menant MG perpendiculaire à BL, la tangente doit être perpendiculaire sur le milieu de FG. Les distances SF, SG, sont égales. Donc, le point G sera déterminé par l'intersection de la directrice et de la circonférence décrite du point S comme centre, avec SF pour rayon. On voit, alors, qu'en joignant GF, et en abaissant ST perpendiculaire sur cette droite, la ligne ST sera tangente à la courbe, et le point de contact se trouvera à l'intersection, M, de cette tangente et de la droite MG parallèle à l'axe. Quand le point S est extérieur à la parabole, sa distance au foyer étant plus grande que sa distance à la directrice, la circonférence coupe cette dernière en deux points G, G′, et il y a deux tangentes.

Quand le point S est sur la parabole, sa distance au foyer est égale à sa distance à la directrice, le cercle est tangent à cette droite, et le problème n'a plus qu'une solution.

Enfin, lorsque le point S est intérieur, la première distance est moindre que la seconde, la circonférence n'atteint plus la directrice, et il n'y a plus de tangente.

Remarque. — Le point A est le milieu de BF ; donc AY doit passer par le point D milieu de GF ; or, la tangente MT passe par ce point, et est perpendiculaire à FD ; donc :

le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes est la droite menée par le sommet perpendiculairement à l'axe.

202. On vient de voir que par un point extérieur on peut toujours mener deux tangentes à une parabole. Examinons le cas où le point donné est sur la directrice.

Soient G (*fig.* 104) le point connu; GM, GM', les deux tangentes. En supposant que F soit le foyer de la courbe, menons les lignes GF, FM, FM', et les perpendiculaires MK, M'K', sur la directrice. Le triangle GMF est égal au triangle GMK; car GM est commun aux deux triangles; MK = MF, et l'angle GMF égale l'angle GMK. Comme l'angle GKM est droit, il en est de même de l'angle MFG. On voit, de plus, que l'angle MGK = MGF. L'égalité des triangles M'K'G, M'FG, prouve que l'angle GFM' est droit, et que M'GK' = M'GF. Les angles MGK, M'GK' étant respectivement égaux aux angles MGF, M'GF, il en résulte que la somme de ces deux derniers angles est égale à un droit, c'est-à-dire que l'angle MGM' est droit. On reconnaît, en outre, que les rayons vecteurs FM, FM', sont en ligne droite. On est donc conduit au théorème suivant, qui mérite d'être remarqué :

Les tangentes menées à la parabole d'un point de la directrice font entre elles un angle droit, et la ligne qui joint les points de contact passe au foyer, et est perpendiculaire sur celle qui joint le foyer au point d'où partent les tangentes.

Des diamètres.

203. Prenons l'équation $y = \delta x + 6$ d'une droite quelconque; en la combinant avec celle de la parabole $y^2 = 2px$, et en éliminant x, on aura

$$y^2 - \frac{2p}{\delta}y + \frac{2p6}{\delta} = 0.$$

Les racines de cette dernière équation sont les ordonnées des points de rencontre de la droite et de la courbe, et l'ordonnée du milieu de la corde qui passe par ces points est égale à la demi-somme de ces deux racines. De sorte qu'en désignant cette ordonnée par y, on a

$$y = \frac{p}{\delta}.$$

Cette valeur ne contient pas 6, et reste la même tant que δ ne change pas. Il résulte de là que *tous les diamètres de la parabole sont parallèles à l'axe de cette courbe.*

Réciproquement, *toute droite parallèle à l'axe peut être regardée comme un diamètre*, puisqu'en donnant à δ une valeur convenable, y devient égal à telle quantité que l'on voudra.

Quand on mène un diamètre à une distance y' de l'axe, on a pour ce diamètre,

$$\frac{p}{\delta} = y'; \quad \text{d'où} \quad \delta = \frac{p}{y'}.$$

Cette valeur est celle de la tangente trigonométrique de l'angle que font avec l'axe des x, les cordes que ce diamètre divise en parties égales. Cette même valeur est aussi égale à la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec l'axe la tangente au point d'intersection du diamètre et de la courbe. Donc, les *cordes qu'un diamètre divise en parties égales sont parallèles à la tangente menée à l'extrémité de ce diamètre.*

Pour que la tangente δ soit infinie, il faut que $y' = 0$: par conséquent, l'axe des abscisses est le seul axe de la parabole.

La parabole rapportée à ses diamètres.

204. Cherchons les systèmes d'axes obliques pour lesquels l'équation de la parabole conserve la forme $y^2 = 2px$.

A cet effet, employons les formules

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha' + a,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \sin\alpha' + b,$$

qui servent à passer des axes rectangulaires aux axes obliques.

Les valeurs de x et de y étant portées dans l'équation

$$y^2 = 2px,$$

donnent :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l|l|l} \sin^2\alpha' . y'^2 + \sin^2\alpha . x'^2 + 2\sin\alpha\sin\alpha' . x'y' & & \\ + 2b\sin\alpha' & y' + 2b\sin\alpha & x' + b^2 \\ - 2p\cos\alpha' & - 2p\cos\alpha & - 2ap \end{array} \right\} = 0.$$

Pour que l'équation ait la forme demandée, il faut que les indéterminées α, α', b, a, satisfassent aux conditions suivantes :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \sin\alpha = 0, & \sin\alpha\sin\alpha' = 0, \\ b\sin\alpha' - p\cos\alpha' = 0, & b^2 - 2pa = 0. \end{array} \right.$$

La seconde condition étant une conséquence de la première, on n'a que trois relations entre α, α', b et a. Il existe donc une infinité de systèmes d'axes obliques pour lesquels l'équation de la parabole conserve la forme $y^2 = 2px$.

La condition $\sin\alpha = 0$ montre que l'axe des x de chaque système doit être un diamètre de la courbe; $b^2 - 2pa = 0$ fait voir que chaque origine est un point de la parabole; la valeur $\tang\alpha' = \frac{p}{b}$, déduite de

$$b\sin\alpha' - p\cos\alpha' = 0,$$

prouve que l'axe des y de chaque système doit être une tangente.

En ayant égard aux conditions (2), l'équation (1) se réduit à

$$\sin^2\alpha' . y'^2 - 2px' = 0.$$

En supprimant les accents sur les lettres x et y, et divisant par $\sin^2 \alpha'$, l'équation précédente devient

$$y^2 = \frac{2p}{\sin^2 \alpha'} \cdot x;$$

ou, en faisant $\frac{p}{\sin^2 \alpha'} = p'$,

$$y^2 = 2p'x.$$

Le coefficient $2p'$ est ce qu'on nomme le *paramètre* du diamètre auquel la parabole est rapportée.

La valeur $\tang \alpha' = \frac{p}{b}$ donne

$$\sin^2 \alpha' = \frac{p^2}{b^2 + p^2} = \frac{p^2}{2pa + p^2} = \frac{p}{2a + p}.$$

On en déduit

$$p' = 2a + p,$$

et, par suite,

$$2p' = 4\left(a + \frac{p}{2}\right).$$

On conclut de là que *le paramètre d'un diamètre quelconque est égal à quatre fois la distance du foyer à l'extrémité de ce diamètre.*

L'équation de la parabole restant la même lorsqu'on rapporte cette courbe à ses diamètres ou à son axe, les propriétés indépendantes de l'angle des coordonnées seront communes à ces différents systèmes.

1°. Selon qu'un point est situé sur la parabole, hors de la parabole, ou dans la parabole, on a

$$y^2 - 2p'x = 0, \quad y^2 - 2p'x > 0,$$
$$y^2 - 2p'x < 0.$$

2°. Les carrés des ordonnées au diamètre sont entre eux comme les abscisses correspondantes.

3°. En désignant par α le coefficient angulaire de la tan-

gente, on a

$$\alpha = \frac{p}{y'};$$

l'équation de la tangente est

$$y'y = p'(x + x'),$$

et la valeur de la sous-tangente, $2x'$; c'est-à-dire que la sous-tangente est toujours le double de l'abscisse du point de contact.

205. Une droite étant donnée sur le plan d'une parabole, si l'on mène à la courbe une tangente parallèle à cette droite, et le diamètre qui passe au point de contact, l'équation de la parabole rapportée à ce système d'axes sera

$$y^2 = 2p'x.$$

En menant d'un point quelconque (x'', y''), de la droite donnée, deux tangentes à la courbe, on a pour déterminer les coordonnées des points de contact, les équations

$$y'^2 = 2p'x',$$
$$y''y' = p'(x' + x'').$$

La seconde indique que la droite qui a pour équation

$$y''y = p'(x + x'')$$

passe par les points de contact. L'hypothèse $y = 0$, dans cette équation, donne

$$x = -x''.$$

Résultat indépendant de y'', et qui conduit pour la parabole au théorème déjà trouvé pour l'ellipse et l'hyperbole.

Donc, en général, *si de chaque point d'une droite donnée on mène deux tangentes à une courbe du second ordre, et qu'on tire une droite par les deux points de contact, on aura des sécantes qui se rencontreront toutes en un même point situé sur le diamètre qui divise en parties égales les cordes parallèles à la droite donnée.*

Réciproquement, *si par un point donné dans le plan d'une courbe du second ordre, on tire différentes sécantes, et que par les points où chaque sécante rencontre la courbe, on mène deux tangentes, le lieu des points d'intersection de ces tangentes, ainsi prises deux à deux, sera une droite parallèle aux cordes que divise en parties égales le diamètre passant au point donné.*

206. L'équation $y^2 = 2p'x$, comparée à l'équation $y^2 = 2px$, montre que pour construire une parabole, connaissant un diamètre; le point où il coupe la courbe; le paramètre; et l'inclinaison des cordes correspondantes : il suffit de décrire une parabole sur ce diamètre pris pour axe, avec le paramètre donné; puis, d'incliner les ordonnées de cette courbe sous l'angle connu, sans changer leurs longueurs.

On peut, aussi, déterminer le foyer et la directrice. Soient A'X' (*fig.* 105) le diamètre donné; A', le point où il coupe la courbe : on mène la droite Y'A'T sous l'inclinaison connue, et cette ligne sera tangente à la parabole au point A'. On fait l'angle TA'F égal à Y'A'X', et la ligne A'F passe par le foyer. En prenant A'F égale au quart du paramètre donné, le point F sera le foyer. Si l'on porte sur le prolongement de A'X', la distance A'H = A'F, la perpendiculaire HH' à A'X' sera la directrice.

Remarque. — La perpendiculaire FB, abaissée du foyer sur la directrice HH', est la moitié du paramètre; et le point A, milieu de FB, est le sommet de la courbe.

207. Quand on donne un arc quelconque de parabole, on peut déterminer par la géométrie : l'axe, le foyer, le paramètre relatif à l'axe.

Soit NN' (*fig.* 105) l'arc donné; si l'on mène les cordes parallèles NN', MM' : la droite A'X' qui joint leurs milieux sera un diamètre de la courbe. La parallèle A'Y' à ces cordes

sera tangente à la parabole. Alors, si au point A′ on fait l'angle KA′T égal à Y′A′X′, la ligne A′K passera par le foyer.

En cherchant un second diamètre, on pourra obtenir une autre droite passant par le foyer; ce point se trouvera ainsi déterminé par la rencontre des deux droites.

Si par le point trouvé on mène une parallèle à l'un des diamètres, on aura l'axe. Le sommet s'obtiendra, comme précédemment, en cherchant d'abord la directrice. Le double de la distance du foyer à cette dernière droite sera la valeur du paramètre.

Le paramètre d'un diamètre quelconque A′X′ s'obtient en prenant quatre fois la distance FA′.

Quadrature de la parabole.

208. Proposons-nous de trouver la surface d'un segment parabolique MA′P (*fig.* 106) terminé par le diamètre A′X′, et l'ordonnée PM, parallèle à la tangente A′Y′.

Après avoir inscrit un polygone A′M″M′M dans la parabole, menons, par les sommets, les ordonnées PM, P′M′, P″M″, etc., et les tangentes MT, M′T′, M″T″, etc. Ces tangentes détermineront par leurs intersections successives des triangles TRT′, T′R′T″, etc., que nous allons comparer aux trapèzes correspondants PMM′P′, P′M′M″P″, etc. En abaissant du point R et du point I, milieu de la corde MM′, des perpendiculaires RQ, IK sur A′X′, on aura

$$\text{surface TRT}' = \frac{1}{2}\text{TT}'.\text{RQ},$$

et

$$\text{surface PMM}'\text{P}' = \text{PP}'.\text{IK (*)}.$$

(*) En effet, menons M′O parallèle à P′P; nous aurons

$$\text{M}'\text{OPP}' = \text{PP}' \times \text{GK}, \quad \text{et} \quad \text{M}'\text{OM} = \text{M}'\text{O} \times \text{IG};$$

puisque IG est la moitié de la hauteur du triangle M′OM, relative à la base M′O qui est égale à PP′. On a donc

$$\text{PMM}'\text{P}' = \text{PP}' \times \text{IK}.$$

De ce que MT est tangente, il résulte que

$$A'T = A'P;$$

par la même raison :

$$A'T' = A'P'; \quad \text{d'où} \quad TT' = PP'.$$

On voit, de plus, que si par le point I on mène IH parallèle à $A'X'$, cette ligne sera un diamètre, et les tangentes aux points M, M' devront se rencontrer au même point de ce diamètre. Donc, le point R est sur le diamètre IH, et, par suite,

$$QR = IK.$$

On conclut de là que le trapèze PMM'P' est double du triangle TRT'. On prouverait de la même manière que le trapèze M'P'M''P'' est double du triangle T'R'T'', et ainsi de suite. Donc, la somme des trapèzes est double de la somme des triangles. Cette proposition, étant indépendante du nombre et de la grandeur des côtés du polygone, doit être vraie lorsque ce nombre devient plus grand que toute quantité assignable. Or, la limite de la somme des trapèzes est le segment parabolique A'PM, et la limite de la somme des triangles est le segment extérieur A'MT; le segment A'PM est donc le double de AMT; ou les deux tiers du triangle rectiligne TMP; ce triangle est équivalent au parallélogramme A'PMN, dont la hauteur est la même, et dont la base A'P est moitié de TP : on en conclut que le segment parabolique APM est les deux tiers du parallélogramme formé sur l'abscisse A'P, et sur l'ordonnée MP.

Remarque. — Le segment A'M'M, compris entre l'arc A'M et sa corde, est le sixième du parallélogramme A'PMN.

CHAPITRE DOUZIÈME.

QUESTIONS RELATIVES AUX COURBES DU SECOND DEGRÉ.

209. Lorsqu'on donne un arc de courbe du second degré, il est facile de reconnaître à laquelle des trois courbes cet arc appartient, et de déterminer les éléments de la courbe.

Pour résoudre la première partie de la question, on mène deux diamètres au moyen de deux systèmes de cordes parallèles, et selon que ces diamètres se coupent du côté de la concavité, ou de la convexité de l'arc, ou sont parallèles, l'arc appartient à une ellipse, ou à une hyperbole, ou à une parabole. Dans les deux premiers cas, le point de rencontre des diamètres est, comme on sait, le centre de la courbe.

1°. L'arc donné MHKN (*fig.* 107) est elliptique.

Soient OH, OK, deux diamètres quelconques, et, par suite, O le centre de la courbe; en menant par ce point une parallèle indéfinie OY, à l'un des systèmes de cordes parallèles, EG, E'G', par exemple; on aura la direction du diamètre conjugué de OH. S'il arrive que ce diamètre rencontre l'arc donné, il sera, comme le premier, déterminé en vraie grandeur, et l'on aura ainsi deux diamètres conjugués en grandeur et en direction.

Lorsque la droite OY ne rencontre pas l'arc, on mène par le point K, une parallèle aux cordes CD, C'D', etc.; cette ligne sera une tangente. Donc, si l'on désigne par x', y', les coordonnées du point K, par rapport aux droites OX,

OY, qui sont les directions de deux diamètres conjugués, l'équation de cette tangente sera

$$a'^2 y' y + b'^2 x' x = a'^2 b'^2,$$

$2b'$ représentant la longueur du diamètre inconnu. En faisant $x = 0$, cette équation donne

$$yy' = b'^2,$$

c'est-à-dire

$$\text{OL} \times \text{OP} = b'^2.$$

Ainsi, on obtiendra b', en prenant une moyenne proportionnelle entre OP et OL, et l'on connaîtra encore deux diamètres conjugués en grandeur et en direction; ce qui permettra de déterminer les axes (page 218).

2°. L'arc donné est hyperbolique.

En opérant comme précédemment, on obtiendra les directions et les longueurs de deux diamètres conjugués, ce qui conduira à la détermination des axes.

3°. L'arc donné est parabolique. La question a été traitée n° 207.

210. *En prenant des axes rectangulaires, et en plaçant l'origine à un sommet, les trois courbes du second ordre peuvent être représentées par l'équation*

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

On a vu qu'en plaçant l'origine des coordonnées au sommet de l'ellipse situé du côté des abscisses négatives, l'équation de la courbe est

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

ou

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

On sait également que si l'origine des coordonnées est pla-

cée au sommet de l'hyperbole, situé du côté des abscisses positives, on a pour équation de la courbe :

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2),$$

ou

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Si l'on fait $\frac{b^2}{a} = p$, et si l'on désigne généralement par q le coefficient de x^2, les deux courbes précédentes seront renfermées dans l'équation

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

La parabole est visiblement comprise dans cette dernière équation, qui se réduit à

$$y^2 = 2px,$$

lorsqu'on suppose

$$q = 0.$$

Quand l'équation représente une ellipse, ou une hyperbole, le coefficient q de x^2 est le carré du rapport du second axe au premier, ce carré étant pris avec le signe *moins* pour l'ellipse, et avec le signe *plus* pour l'hyperbole. Le coefficient $2p$ de la première puissance de x est le *paramètre* de chacune de ces courbes. Il est égal à la troisième proportionnelle au premier et au second axe. Il a aussi pour valeur la double ordonnée du foyer dans chacune des trois courbes.

L'équation $y^2 = 2px + qx^2$ ne renferme pas toutes les variétés des courbes du second degré; on n'y trouve que le cercle, le point, le système de deux droites qui se coupent, et une seule droite.

211. Théorème de Newton. — *Si par un point quelconque, pris sur le plan d'une courbe algébrique, on mène*

deux transversales, parallèles chacune à une direction fixe, le produit des segments interceptés entre ce point et les différents points d'intersection de la courbe avec une des transversales, sera au produit des segments formés de la même manière sur l'autre transversale, dans un rapport constant, quelle que soit la position du point.

Soient XX' et YY' deux droites menées suivant deux directions quelconques ; O le point de concours de ces droites ; M', M'', M''', etc., les points de rencontre de XX' avec la courbe ; N', N'', N''', etc., les points où YY' coupe cette même courbe.

Supposons la courbe du degré m, et rapportons-la aux droites XX' et YY' qui se rencontrent au point O ; son équation sera de la forme

$$(1) \qquad Ay^m + \ldots + Hx^m + \ldots + U = 0.$$

Si l'on fait $y = 0$, on aura

$$OM'.OM''.OM'''\ldots = \pm \frac{U}{H}.$$

L'hypothèse $x = 0$ donnera

$$ON'.ON''.ON'''\ldots = \pm \frac{U}{A};$$

d'où

$$\frac{OM'.\,OM''.\,OM'''\ldots}{ON'.\,ON''.\,ON'''\ldots} = \frac{A}{H}.$$

Transportons l'origine des coordonnées en un point quelconque O' du plan, sans changer la direction des axes, et soient m', m'', m''', etc., les points où la courbe est rencontrée par le nouvel axe des x, et n', n'', n''', etc., ceux où elle est coupée par le nouvel axe des y ; on trouvera l'équation de la courbe, rapportée aux nouveaux axes, en remplaçant x par $x + a$, et y par $y + b$; a et b désignant les coordonnées de l'origine O'. Or, cette transformation n'altère pas les termes du degré m : donc, en faisant $y = 0$

dans la nouvelle équation, on obtiendra

$$O'm'.O'm''.O'm'''... = \pm \frac{U'}{H};$$

la supposition $x = o$ donnera

$$O'n'.O'n''.O'n'''... = \pm \frac{U'}{A},$$

d'où

$$\frac{O'm'.O'm''.O'm'''...}{O'n'.O'n''.O'n'''...} = \frac{A}{H};$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

212. *Application aux courbes du second degré.* — Soient A, B, C, D, E (*fig.* 108), cinq points d'une courbe du second degré. Tirons les droites AC et BE qui se coupent en H. Par le point D menons DF parallèle à AC, nous aurons

$$\frac{IF \times ID}{BI \times IE} = \frac{AH \times CH}{BH \times EH}.$$

Cette égalité donne IF; et, par suite, le point F. En menant DG parallèle à BE, on trouvera le point G par la relation

$$\frac{PG \times DP}{AP \times CP} = \frac{BH \times EH}{AH \times CH}.$$

Si l'on joint le milieu M de AC au milieu N de DF, la ligne MN sera un diamètre. On aura un autre diamètre KL en faisant passer une droite par les milieux K et L des cordes parallèles BE et DG. Lorsque les diamètres MN et KL se couperont, la courbe sera une ellipse ou une hyperbole ayant pour centre le point de rencontre O de ces diamètres.

On peut, dans ce cas, déterminer la position et les longueurs de deux diamètres conjugués. En effet, supposons que les diamètres KL et MN soient conjugués et que la courbe soit une ellipse; pour déterminer leurs longueurs

que nous désignerons par $2a'$ et $2b'$, on aura

$$\frac{a'^2}{b'^2} = \frac{\mathrm{AH} \times \mathrm{HC}}{\mathrm{BH} \times \mathrm{HE}}$$

et

$$a'^2 \times \mathrm{BK}^2 + b'^2 \times \overline{\mathrm{OK}}^2 = a'^2 b'^2;$$

d'où

$$\frac{a'^2}{b'^2} \times \overline{\mathrm{BK}}^2 + \overline{\mathrm{OK}}^2 = a'^2.$$

On pourra donc trouver a'^2, et, par suite, b'^2.

Si les diamètres MN et KL ne sont pas conjugués, on aura la position du diamètre conjugué de KL, en menant par le centre une parallèle à BE. On mènera par le point C une parallèle à KL, et on la prolongera d'une longueur égale, de l'autre côté du diamètre conjugué; l'extrémité de cette longueur sera un point de la courbe : on rentre, ainsi, dans le cas précédent.

Pour que la question soit possible, il faut que, parmi les cinq points, il ne s'en trouve pas trois en ligne droite.

Parabole. — *Construire une parabole, connaissant quatre points de la courbe.*

Soient A, B, C, D (*fig.* 109), les quatre points donnés. Supposons que les droites AB et CD concourent au point R, et qu'on ait mené les tangentes SM et SN parallèles à ces droites. Par le théorème de Newton, on a

$$\frac{\overline{\mathrm{SM}}^2}{\overline{\mathrm{SN}}^2} = \frac{\mathrm{RA} \times \mathrm{RB}}{\mathrm{RC} \times \mathrm{RD}}.$$

Prenons sur RB et RD deux points G et H, de telle manière que

$$\overline{\mathrm{RG}}^2 = \mathrm{RA} \times \mathrm{RB} \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{RH}}^2 = \mathrm{RC} \times \mathrm{RD};$$

en substituant, il viendra

$$\frac{\overline{\mathrm{SM}}^2}{\overline{\mathrm{SN}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{RG}}^2}{\overline{\mathrm{RH}}^2},$$

d'où

$$\frac{SM}{SN} = \frac{RG}{RH}.$$

Les triangles SMN, RGH sont donc semblables. Il est visible qu'en tirant les médianes SK et RL, les triangles SMK, RGL seront aussi semblables. Or, SK est un diamètre ; donc RL est aussi un diamètre, et la position de ce dernier est complétement déterminée.

Connaissant la direction des diamètres et trois points, on peut construire la courbe.

En effet, soient M, M', M'' (*fig.* 110), trois points d'une parabole; $2p'$ le paramètre du diamètre AX conjugué de la corde MM''. En supposant la courbe rapportée à ce diamètre et à la tangente conjuguée, on aura

$$\overline{MP}^2 = 2p' \times AP \quad \text{et} \quad \overline{P'M'}^2 = 2p' \times AP'.$$

Retranchant membre à membre, il vient

$$\overline{MP}^2 - \overline{M'P'}^2 = 2p'(AP - AP');$$

ou, en menant M'G parallèle à AX,

$$MG \times M''G = 2p' \times M'G.$$

Les trois points M, M', M'', et la direction des diamètres étant donnés, on pourra donc déterminer le paramètre du diamètre relatif à la corde qui passe par deux des trois points. Par suite, il sera facile de trouver l'extrémité de ce diamètre; car on aura

$$\overline{MP}^2 = 2p' \times AP,$$

d'où

$$AP = \frac{\overline{MP}^2}{2p'}.$$

On déterminera le foyer, l'axe, le sommet et la directrice, au moyen de la construction indiquée n° 206.

Remarque. — Lorsque les cordes AC et BD se couperont, on pourra construire une seconde parabole passant par les quatre points A, B, C, D. Mais, si ces droites sont parallèles, la seconde parabole n'existera pas. Enfin, si les droites AC et BD étant parallèles, les droites AB et CD étaient aussi parallèles, il n'existerait aucune parabole passant par les points A, B, C, D.

213. Le théorème de Newton conduit encore aux propositions suivantes :

Supposez que par deux points donnés C, D (fig. 111), *sur une courbe du second degré, on fasse passer une circonférence qui coupe la courbe en deux autres points* C', D'; *la corde* C' D' *fera avec les axes de la courbe les mêmes angles que la corde* CD *qui unit les deux points donnés.*

En effet, si l'on mène les tangentes RT, RT', respectivement parallèles aux cordes CD, C'D', dont les directions se coupent au point S, on aura

$$\frac{\overline{RT}^2}{\overline{RT'}^2} = \frac{SC \times SD}{SC' \times SD'} = 1, \quad \text{d'où} \quad RT = RT'.$$

Les tangentes RT, RT', étant égales, leur point de concours sera sur un axe de la courbe, et de plus elles formeront avec cet axe des angles TRA, T'RA égaux entre eux. Par conséquent, les cordes CD, C'D', font aussi avec l'axe AA', des angles égaux.

Il en résulte que, *si par deux points* C, D, *donnés sur une courbe du second degré, on fait passer différentes circonférences telles que* CDC'D', *qui coupent chacune la courbe en deux autres points, les cordes déterminées par ces derniers points seront parallèles entre elles.*

Si l'on suppose que les deux points d'intersection donnés,

C, D, se réduisent à un seul T; les circonférences toucheront la courbe en ce point : d'où il faut conclure que, *si l'on décrit différentes circonférences tangentes à une courbe du second degré en un point donné* T, *et qui coupent, chacune, cette courbe en deux autres points* C′, D′ : *les cordes correspondantes à ces derniers points seront parallèles entre elles.*

Concevons, maintenant, que la corde C′D′ restant parallèle à la tangente T′R, s'approche de plus en plus du point de tangence T. Les circonférences qui passent par les points C′, D′, T, restent tangentes à la courbe au point T, et la coupent en deux autres points C′, D′; l'un de ces points, D′, se rapproche continuellement de T. Lorsque le point D′ coïncide avec T, le point C′ coïncide avec l'extrémité M de la corde TM, menée par le point T parallèlement à T′R. Alors, la circonférence est considérée comme ayant avec la courbe du second degré *trois points communs* qui se confondent en un seul, T; le quatrième point commun à ces deux courbes est le point M. Dans ce cas particulier, on dit que le cercle est *osculateur* à la courbe considérée, au point T, et le rayon de ce cercle est le *rayon de courbure* de la ligne dont il s'agit, au point T.

Pour déterminer le centre E du cercle osculateur au point T, on mènera par ce point la corde TM parallèle à T′R; puis, on élèvera au milieu G de TM, une perpendiculaire à cette corde, et au point T, une perpendiculaire à la tangente TR : le point d'intersection E de ces deux perpendiculaires sera le centre du cercle osculateur. La droite ET sera le rayon de courbure.

214. Hexagone de Pascal. — *Lorsqu'on prolonge deux à deux les côtés opposés d'un hexagone inscrit à une courbe du second degré, les trois points de concours sont en ligne droite.*

Soient

$$y - ax - b = 0 \quad \text{et} \quad y - a'x - b' = 0$$

les équations des droites AB et DC (*fig.* 112); si l'on multiplie par ordre ces deux équations, on aura une équation du second dégré,

$$(1) \qquad y^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

qui sera celle du système des deux droites AB et DC.

On obtiendra une équation de la même forme

$$(2) \qquad y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0,$$

pour le système des droites AF et DE.

Soit

$$(3) \qquad y^2 + B''xy + C''x^2 + D''y + E''x + F'' = 0$$

l'équation de la courbe.

L'axe des y passant par les points A et D, on aura

$$D = D' = D'' \quad \text{et} \quad F = F' = F''.$$

En effet, si l'on suppose $x = 0$ dans chacune des équations (1), (2), (3), on obtiendra trois équations en y:

$$y^2 + Dy + F = 0,$$
$$y^2 + D'y + F' = 0,$$
$$y^2 + D''y + F'' = 0,$$

qui auront, chacune, pour racines OD et OA.

En soustrayant l'une de l'autre les équations (3) et (1), on trouve une équation qui doit être vérifiée par les valeurs des coordonnées des points A, D, C et B, et qui est

$$x[(B - B'')y + (C - C'')x + E - E''] = 0;$$

elle se décompose en

$$(4) \quad x = 0 \quad \text{et} \quad (B - B'')y + (C - C'')x + E - E'' = 0.$$

Cette dernière équation est celle de la droite BC, puisqu'elle

est du premier degré et doit être satisfaite par les coordonnées des points B et C.

Si l'on retranche de même les équations (3) et (2), il viendra

$$x[(B'-B'')y+(C'-C'')x+E'-E'']=0,$$

qui se décompose en

$$(5)\quad x=0 \quad \text{et} \quad (B'-B'')y+(C'-C'')x+E'-E''=0.$$

Cette dernière est l'équation de EF.

Les valeurs des coordonnées du point de concours, N, des droites BC et FE doivent satisfaire à l'équation

$$(6)\qquad (B-B')y+(C-C')x+E-E'=0,$$

qu'on obtient en retranchant l'une de l'autre les équations (5) et (4). Mais, si l'on soustrait l'une de l'autre les équations (2) et (1), on a

$$x[(B-B')y+(C-C')x+E-E']=0,$$

équation qui se décompose en

$$x=0 \quad \text{et} \quad (B-B')y+(C-C')x+E-E'=0.$$

Cette dernière doit être satisfaite par les valeurs des coordonnées du point de rencontre, P, des droites AB et ED, et aussi par les valeurs des coordonnées du point de rencontre, M, des droites AF et CD. Elle est donc l'équation de la droite qui joint ces deux points de rencontre; or, elle n'est autre que l'équation (6).

Par conséquent, les trois points de concours N, P, M, sont en ligne droite.

215. Pentagone inscrit. — Soient A, B, C, D, E (*fig.* 113) cinq points d'une courbe du second ordre. Supposons qu'on joigne ces points deux à deux par les droites AB, BC, CD, DE, et que par le point A on mène une droite quelconque AK. On pourra considérer cette droite comme

une sécante, rencontrant la courbe en un point G, qui sera le sixième sommet d'un hexagone inscrit dont les cinq autres sommets sont les points donnés. Par conséquent, si l'on prolonge AB et ED jusqu'à leur rencontre en M, et DC jusqu'à son point d'intersection N avec AK, qu'on tire la droite MN : en joignant au point E le point de rencontre P de BC avec MN, la droite PE coupera la droite AK au point G qui appartient à la courbe; car, si le point de rencontre de AK avec PE était un point H autre que G, le point d'intersection des côtés GE et BC ne serait pas en ligne droite avec les points M et N.

On pourra, de cette manière, déterminer autant de points qu'on voudra de la courbe, lorsqu'on en connaîtra cinq; et si l'on fait mouvoir la droite MN autour du point M, les droites NG et PG tourneront autour des points A et E, et leur point de concours G décrira la courbe.

Tangente. — Soient ABCDE (*fig.* 114) un pentagone inscrit à une courbe du second ordre, et F un point de la courbe placé entre A et E; si l'on suppose que le point F se rapproche continuellement du point A, et vienne se confondre avec lui, la corde AF, à cette limite, sera tangente à la courbe au point A, et le côté EF se confondra avec EA. Par conséquent, si l'on détermine le point de concours, M, des côtés AB et DE, et le point de rencontre, N, de BC et du côté opposé EF confondu avec EA, qu'on tire la droite MN, le point d'intersection, P, de CD avec MN sera aussi le point d'intersection de CD et du côté opposé FA, devenu tangent au point A.

Donc, la droite RT qui passe par les points P et A sera tangente à la courbe au point A.

216. *Construire une courbe du second ordre dont on donne cinq points.*

Soient A, B, C, D, E (*fig.* 115) les points donnés. On

construira le pentagone ABCDE, et l'on pourra déterminer les tangentes à la courbe aux différents sommets de ce pentagone. Considérons les tangentes aux trois sommets E, A, B. Lorsque la courbe sera une ellipse ou une hyperbole, on trouvera le centre en traçant les diamètres KO et FO, relatifs aux cordes EA et AB, et en les prolongeant jusqu'à leur point de concours O. Si l'on tire le rayon OA et qu'on le prolonge d'une longueur égale OL, en menant par le point L une parallèle LT à KF, la droite LT sera tangente au point L. Le diamètre conjugué de OA sera dirigé suivant la droite OM, menée par le centre parallèlement à KF. Pour avoir la longueur de la moitié, OM, de ce diamètre, on prolongera LT jusqu'à sa rencontre en R avec KE, et on prendra une moyenne proportionnelle entre RL et AK (*). On connaîtra donc de grandeur et de position deux diamètres conjugués de la courbe.

On ferait la même construction pour l'hyperbole. Si les diamètres menés par les points F et K sont parallèles, la courbe sera une parabole, et l'on pourra la construire,

(*) Si l'on mène deux tangentes ST et S'T' (*fig.* 116) par les extrémités d'un diamètre AA' de l'ellipse, le produit des segments AM, A'M', de ces tangentes, compris entre les points A et A' et une troisième tangente, M'M, est égal au carré de la moitié du diamètre conjugué de AA'. En effet, soient $2a'$ et $2b'$ les longueurs des diamètres AA' et BB'; en rapportant la courbe à ces deux diamètres, et en prenant le premier pour axe des x, l'équation de la tangente M'M sera

$$a'^2 y' y + b'^2 x' x = a'^2 b'^2.$$

Pour $x = a'$, on aura

$$\mathrm{AM} = \frac{b'^2 (a' - x')}{a' y'}.$$

Pour $x = -a'$, on aura

$$\mathrm{A'M'} = \frac{b'^2 (a' + x')}{a' y'}.$$

D'où

$$\mathrm{AM} \times \mathrm{A'M'} = \frac{b'^4 (a'^2 - x'^2)}{a'^2 y'^2} = b'^2.$$

La même propriété existe pour l'hyperbole.

puisque l'on connaîtra la direction des diamètres et trois points.

Remarque. — Pour que le problème énoncé soit possible, il faut que parmi les cinq points donnés il ne s'en trouve pas trois en ligne droite.

217. *Quadrilatère inscrit.* — Si l'on suppose que deux couples de sommets d'un hexagone inscrit (*fig.* 112) se réunissent en un seul, on aura un quadrilatère inscrit et deux tangentes menées par deux sommets. Ces deux sommets peuvent être adjacents, ou opposés. Dans le premier cas, on a le théorème suivant :

Si par deux sommets adjacents d'un quadrilatère inscrit à une courbe du second ordre, on mène des tangentes à cette courbe, les points de concours de chacune de ces tangentes avec le côté adjacent au sommet par lequel passe l'autre tangente, et le point de concours des deux autres côtés, seront trois points en ligne droite.

Dans le second cas, c'est-à-dire quand les tangentes sont menées par deux sommets opposés, on a ce théorème : *Dans tout quadrilatère inscrit à une courbe du second ordre, les points de concours des côtés opposés, et le point de concours de deux tangentes menées par deux sommets opposés, sont trois points en ligne droite.*

218. *Triangle inscrit.* — On peut supposer que trois des côtés de l'hexagone inscrit deviennent des tangentes ; il en résultera un triangle inscrit et trois tangentes menées par les sommets de ce triangle ; et par conséquent, on aura encore le théorème suivant :

Si deux triangles sont, l'un inscrit et l'autre circonscrit à une courbe du second ordre, de telle sorte que les points de contact de l'un soient les sommets de l'autre, les trois points de concours des côtés opposés de ces triangles sont sur la même ligne droite.

219. Hexagone de Brianchon. — *Les trois diagonales qui joignent les sommets des angles opposés d'un hexagone circonscrit à une courbe du second degré, se coupent au même point.*

Si du sommet A (*fig.* 117) on mène une sécante à la courbe, et que par les points de rencontre on conduise des tangentes, ces tangentes se couperont en un point de la corde des contacts GH des côtés AB, AF. Il en sera de même pour le point D; par conséquent, si par les points de rencontre de AD avec la courbe on mène deux tangentes, ces lignes se couperont en un point situé à la fois sur la corde des contacts GH des tangentes AB, AF, et sur la corde des contacts G′H′ des tangentes DC, DE; ce point sera donc le point de concours de deux côtés opposés de l'hexagone inscrit à la courbe et formé en joignant, deux à deux, chaque point de contact au suivant. La diagonale BE sera, de même, dirigée suivant la corde des contacts de deux tangentes menées à la courbe par le point de concours de deux autres côtés opposés de l'hexagone inscrit. Enfin la diagonale CF sera dirigée suivant la corde des contacts de deux tangentes menées du point de concours des côtés formant le troisième couple de côtés opposés de l'hexagone inscrit. Les trois diagonales se confondent donc avec les cordes de contact de trois couples de tangentes menées de trois points situés en ligne droite. Or, on sait que, si des différents points d'une droite on mène des tangentes à une courbe du second degré, les cordes de contact passent toutes par un même point; par conséquent, les diagonales de l'hexagone circonscrit doivent se couper au même point.

220. Pentagone circonscrit. — *Soit* ABCDE (fig. 118) *un pentagone circonscrit à une courbe du second ordre; on pourra déterminer le point de contact de chacun des côtés avec la courbe.*

En effet, soit I le point de contact du côté EA; concevons une sixième tangente FG, dont le point de contact H soit situé entre les points de contact I et K des côtés AE et AB, et supposons que cette tangente se meuve de manière que le point de contact H se rapproche continuellement du point I, et vienne enfin se confondre avec lui. Le sommet F et le point H se confondront en même temps avec le point I, et le sommet G se placera sur le point A. Les diagonales GD et FC viendront coïncider avec la diagonale AD et la droite IC. Par conséquent, pour déterminer le point de contact d'un côté AE du pentagone circonscrit, il faudra joindre chacune des extrémités de ce côté au sommet voisin de l'autre extrémité; puis, le point d'intersection de ces diagonales au cinquième sommet C: le point de rencontre de cette ligne de jonction et du côté AE sera le point de contact de AE. On pourra donc, si l'on donne cinq tangentes à une courbe du second ordre, déterminer le point de contact de chaque tangente, et par suite trouver un système de diamètres conjugués, si la courbe est une ellipse ou une hyperbole; et si la courbe est une parabole, construire cette courbe après avoir déterminé, soit la direction des diamètres, soit le foyer.

221. *Quadrilatère circonscrit.* — En supposant que deux côtés adjacents de l'hexagone circonscrit se confondent en un seul, les deux points de contact et le sommet intermédiaire se réunissent en un seul point, et l'angle de ces côtés devient égal à deux droits. Si l'on suppose que l'angle opposé de l'hexagone devienne, de la même manière, égal à deux droits, on aura un quadrilatère circonscrit, et ce théorème:

Dans tout quadrilatère circonscrit à une courbe du second ordre, les deux diagonales et les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés se coupent en un même point.

222. *Triangle circonscrit.* — Si un troisième angle de l'hexagone devient égal à deux droits, on a un triangle circonscrit, et le théorème suivant :

Dans tout triangle circonscrit à une courbe du second ordre, les droites menées des sommets aux points de contact des côtés opposés se coupent en un même point.

Des foyers.

223. En traitant précédemment la question des foyers pour chacune des trois lignes du second ordre, nous avons donné une définition des foyers, qui s'applique seulement au cas particulier où les axes de ces courbes coïncident avec les axes des coordonnées; la définition générale des foyers est la suivante :

On nomme *foyer* d'une courbe *un point dont la distance à un point quelconque de cette courbe est une fonction rationnelle et entière du premier degré*, $my + nx + p$, *des coordonnées du point de la courbe.*

Si l'on désigne par α et β les coordonnées du foyer, l'expression de la distance d de ce point à un point quelconque de la courbe, ayant pour coordonnées x et y, sera (en supposant les axes rectangulaires) :

$$d = \sqrt{(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2} = my + nx + p,$$

d'où

$$(a) \qquad (y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 - (my + nx + p)^2 = 0.$$

Quelles que soient les valeurs déterminées pour α, β, m, n, p, cette dernière relation a lieu entre x et y pour un point quelconque de la courbe; par conséquent, le premier membre de l'équation (a) est égal au premier membre de l'équation générale

$$(b) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

multiplié par un facteur numérique. Désignant par λ ce

facteur numérique, le premier membre de l'équation (a) et le produit $\lambda A y^2 + \lambda B xy + \lambda C x^2 + \lambda D y + \lambda E x + \lambda F$ doivent être identiques. En développant les calculs, on aura les équations :

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \lambda A = 1 - m^2, & (1) \\ \lambda C = 1 - n^2, & (2) \\ \lambda B = -2mn, & (3) \\ \lambda D = -2(\beta + mp), & (4) \\ \lambda E = -2(\alpha + np), & (5) \\ \lambda F = \alpha^2 + \beta^2 - p^2. & (6) \end{array} \right.$$

Lorsqu'on attribue une valeur déterminée à chacune des quantités m, n, p, l'équation $my + nx + p = 0$ représente une droite. La distance δ d'un point de la courbe à cette droite, et la distance d du même point au foyer, sont dans un rapport constant. En effet, la distance δ d'un point x', y', de la courbe à la droite dont il s'agit, a pour expression $\frac{my' + nx' + p}{\sqrt{m^2 + n^2}}$; la distance d du même point de la courbe au foyer est $my' + nx' + p$; on a donc

$$\frac{d}{\delta} = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

On nomme *directrice* la droite $my + nx + p = 0$.

Si l'on élève au carré les deux membres de (3), et qu'on en retranche le quadruple produit des deux membres de (1) et (2), on aura

$$\lambda^2 (B^2 - 4AC) = 4(m^2 + n^2 - 1);$$

donc, suivant que $B^2 - 4AC$ sera < 0, > 0, $= 0$; $m^2 + n^2$ sera < 1, > 1, $= 1$.

Pour trouver les quantités α, β, m, n, p, λ, l'équation (b) étant donnée, on distinguera le cas où cette équation représente une ellipse ou une hyperbole, de celui où elle représente une parabole.

Quand l'équation (b) est celle d'une ellipse ou d'une hyperbole, on peut supposer la courbe rapportée à son centre; car, ayant déterminé dans cette dernière hypothèse, les valeurs de α et de β, il suffit d'augmenter ou de diminuer respectivement ces valeurs des coordonnées du centre, pour avoir ces mêmes valeurs dans la première hypothèse.

Les équations (c) deviennent, en plaçant l'origine au centre de la courbe,

$$(d)\quad\left\{\begin{array}{ll}\lambda A = 1 - m^2, & (1)\\ \lambda C = 1 - n^2, & (2)\\ \lambda B = -2mn, & (3)\\ 0 = \beta + mp, & (4)\\ 0 = \alpha + np, & (5)\\ \lambda F' = \alpha^2 + \beta^2 - p^2. & (6)\end{array}\right.$$

Les équations (4) et (5) conduisent à la relation

$$\beta^2 + \alpha^2 = (m^2 + n^2)p^2.$$

Portant la valeur $\alpha^2 + \beta^2$ dans (6), il vient

$$\lambda F' = (m^2 + n^2 - 1)p^2;$$

d'où, à cause de $m^2 + n^2 - 1 = \dfrac{\lambda^2(B^2 - 4AC)}{4}$,

$$\frac{\lambda\,(B^2 - 4AC)p^2}{4} = F';$$

p^2 étant essentiellement positif, le signe de λ sera déterminé par celui de F', et le signe de λ étant ainsi connu, l'équation (3) fera savoir si m et n doivent être de même signe ou de signes contraires. Les équations (4) et (5) étant écrites sous la forme

$$\beta = -mp, \quad \alpha = -np,$$

on en tire

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{m}{n}.$$

D'un autre côté, si l'on retranche (1) de (2), ce qui

donne

$$\lambda(C - A) = m^2 - n^2,$$

et qu'on divise membre à membre cette dernière équation par l'équation (3), on aura

$$\frac{m}{n} - \frac{n}{m} = \frac{2(A - C)}{B}.$$

Désignant $\frac{m}{n}$ par ν, cette équation prendra la forme

$$(e) \qquad \nu^2 - \frac{2(A - C)}{B}\nu - 1 = 0,$$

dont les racines sont de signes contraires. Or, le signe de $\frac{m}{n}$ est déterminé par la relation (3); par conséquent, $\frac{m}{n}$ ou ν n'a qu'une valeur, ce qui démontre que les directrices sont parallèles.

λ ne peut avoir non plus qu'une valeur; de $\lambda C = 1 - n^2$ on tire

$$n^2 = 1 - \lambda C,$$

et en divisant membre à membre l'équation (3) par cette dernière relation, on obtient

$$\frac{\lambda B}{\lambda C - 1} = \frac{2m}{n} = 2\nu,$$

d'où

$$\lambda = \frac{2\nu}{2C\nu - B}.$$

Connaissant la valeur de λ, on déterminera la valeur de p^2 par l'équation

$$\frac{\lambda(B^2 - 4AC)p^2}{4} = F'.$$

On trouvera m^2 et n^2 par les équations (1) et (2), et enfin

les équations

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{m}{n} \quad \text{et} \quad \lambda F' = \alpha^2 + \beta^2 - p^2$$

serviront à calculer les valeurs de α et de β. La première de ces équations est celle d'une droite passant par le centre et perpendiculaire aux directrices; la seconde représente un cercle concentrique à la courbe. On voit par là qu'il y a, dans l'ellipse et l'hyperbole, deux foyers qui se trouvent à l'intersection d'une droite et d'un cercle. L'équation des directrices

$$my + nx + p = 0 \quad \text{ou} \quad y = -\frac{n}{m}x - \frac{p}{m},$$

montre qu'il y a deux directrices, parallèles et également éloignées du centre; puisque $\frac{m}{n}$ et, par suite, $-\frac{n}{m}$ n'a qu'une valeur, et que $\frac{p}{m}$ a deux valeurs égales et de signes contraires.

Remarque. — On peut déterminer le système d'axes auquel la courbe doit être rapportée pour que la distance d'un point de cette courbe au foyer soit une fonction rationnelle de l'abscisse seulement, ou de l'ordonnée seulement. En effet, il faudra que l'expression de la distance se réduise, soit à $nx + p$, soit à $my + p$, c'est-à-dire que m ou n doit être nul; ce qui démontre qu'il faudra, dans le premier cas, changer le système d'axes en un autre dont l'axe des abscisses soit perpendiculaire aux directrices, et dans le second, changer le système d'axes en un autre dont l'axe des ordonnées soit perpendiculaire aux directrices.

Parabole. — Reprenons le système (c) et rappelons-nous que dans le cas de la parabole, $m^2 + n^2 = 1$. On calculera d'abord λ en ajoutant les équations (1) et (2); ce qui donnera

$$\lambda = \frac{1}{A + C}.$$

Connaissant λ, on déterminera le signe de mn, et ce produit lui-même, par l'équation (3). Le signe de $\frac{m}{n}$ sera le même que celui de mn, et par suite l'équation (e) donnera la valeur unique de $\frac{m}{n}$.

Pour trouver α et β, on observera que les équations (4) et (5) peuvent se mettre sous la forme

$$(f) \qquad mp = -\beta - \frac{\lambda D}{2},$$

$$(g) \qquad np = -\alpha - \frac{\lambda E}{2}.$$

Divisant membre à membre, on a

$$(i) \qquad \frac{m}{n} = \frac{\beta + \frac{\lambda D}{2}}{\alpha + \frac{\lambda E}{2}}, \quad \text{d'où} \quad \beta + \frac{\lambda D}{2} = \frac{m}{n}\left(\alpha + \frac{\lambda E}{2}\right).$$

Élevant au carré les deux membres des équations (f) et (g) et ajoutant, il vient

$$(m^2 + n^2)p^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \lambda D\beta + \lambda E\alpha + \frac{\lambda^2(D^2 + E^2)}{4}.$$

Substituant dans (6), on obtient

$$\lambda F = -\lambda D\beta - \lambda E\alpha - \frac{\lambda^2(D^2 + E^2)}{4},$$

ou enfin,

$$(k) \qquad D\beta + E\alpha + \frac{\lambda(D^2 + E^2)}{4} + F = 0.$$

Les équations (i) et (k) étant celles de deux droites, il en résulte que, dans la parabole, il n'existe qu'un foyer placé à l'intersection de ces droites, dont l'une (i) est perpendiculaire à la directrice.

On déterminera m^2 et n^2 par les relations (1) et (2),

et p^2 par l'équation (6), après avoir calculé α et β. L'équation (f) montre que mp n'a qu'une seule valeur : or, m^2 n'a qu'une valeur ; donc il en est de même de $\frac{p}{m}$. On conclut de là, puisque $\frac{m}{n}$ n'a aussi qu'une valeur, qu'il n'existe qu'une directrice pour la parabole.

Du nombre des points déterminant une courbe du second degré.

224. En reprenant l'équation générale du second degré,

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0, \tag{1}$$

nous ferons observer qu'il est permis de diviser tous les coefficients de cette équation par l'un quelconque d'entre eux ; il n'y a donc que cinq coefficients ou paramètres à calculer. Il faudra, en général, cinq conditions, ou cinq points, pour déterminer une ligne du second ordre.

Quatre conditions suffisent pour une parabole, puisque l'on a entre les coefficients de l'équation (1) la relation

$$B^2 - 4AC = 0.$$

Proposons-nous de *trouver l'équation d'une section conique qui passe par cinq points donnés* (fig. 119).

Soient A, B, C, D, E les cinq points. Nous choisirons les axes de manière que chacun d'eux passe par deux des points donnés, et nous nommerons x' et x'' les abscisses des points A et B ; y' et y'' les ordonnées des points C et D ; x''' et y''' les coordonnées du point E. En mettant successivement ces valeurs dans l'équation (1), nous trouverons les cinq équations

$$Ay'^2 + Dy' + F = 0, \quad Ay''^2 + Dy'' + F = 0,$$
$$Cx'^2 + Ex' + F = 0, \quad Cx''^2 + Ex'' + F = 0,$$
$$Ay'''^2 + Bx'''y''' + Cx'''^2 + Dy''' + Ex''' + F = 0.$$

Divisant, comme nous l'avons dit plus haut, tous les termes par l'un quelconque des coefficients, F par exemple, les équations à résoudre seront :

$$\frac{A}{F}y'^2 + \frac{D}{F}y' + 1 = 0, \qquad \frac{A}{F}y''^2 + \frac{D}{F}y'' + 1 = 0,$$

$$\frac{C}{F}x'^2 + \frac{E}{F}x' + 1 = 0, \qquad \frac{C}{F}x''^2 + \frac{E}{F}x'' + 1 = 0,$$

$$\frac{A}{F}y'''^2 + \frac{B}{F}x'''y''' + \frac{C}{F}x'''^2 + \frac{D}{F}y''' + \frac{E}{F}x''' + 1 = 0.$$

Le calcul n'offre aucune difficulté, et conduit aux valeurs suivantes :

$$\frac{A}{F} = \frac{1}{y'y''}, \quad \frac{D}{F} = \frac{-y'-y''}{y'y''}, \quad \frac{C}{F} = \frac{1}{x'x''}, \quad \frac{E}{F} = \frac{-x'-x''}{x'x''},$$

$$\frac{B}{F} = -\frac{1}{x'''y'''}\left[\frac{y'''(y'''-y''-y')}{y'y''} + \frac{x'''(x'''-x''-x')}{x'x''} + 1\right].$$

En portant ces valeurs dans l'équation (1), après avoir aussi divisé tous ses termes par F, on obtient l'équation demandée.

Les rapports précédents ne seront ni infinis ni indéterminés, si aucune des quantités x', x'', y', y'', x''', y''', n'est égale à zéro, c'est-à-dire si parmi les cinq points, il n'y en a pas trois en ligne droite. Cette condition est nécessaire, et lorsqu'elle sera remplie, on trouvera pour $\frac{A}{F}$, $\frac{D}{F}$, $\frac{C}{F}$, $\frac{E}{F}$, $\frac{B}{F}$, un système unique de valeurs ; donc, *par cinq points donnés, quand il n'y en a pas trois en ligne droite, on peut toujours faire passer une section conique, mais on n'en peut faire passer qu'une.*

225. La connaissance du centre donne deux conditions ; car si l'on met les coordonnées x', y', de ce point dans les

équations (n^o 95), on aura deux équations entre les coefficients de l'équation (1). Le foyer représente aussi deux conditions; puisqu'en écrivant dans les équations de ce point (n^o 223) les coordonnées connues, on obtiendra deux relations entre les coefficients à calculer.

Donner une tangente, c'est établir une seule condition.

En effet, quand on veut exprimer qu'une droite touche l'une quelconque des courbes représentées par l'équation (1), on est conduit à une relation unique entre les coefficients de cette équation. Si l'on connaît la tangente et son point de contact, on aura deux conditions.

Traitons la question dans ce dernier cas, et supposons que la courbe doive toucher la droite OY (*fig.* 120) au point C, dont l'ordonnée est y'. Si l'on fait $x = 0$ dans l'équation (1), il vient

$$Ay^2 + Dy + F = 0,$$

d'où

$$y = -\frac{D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{D^2 - 4AF}.$$

Ces deux valeurs devant être égales à y', on trouve les deux équations

$$D^2 - 4AF = 0, \quad -\frac{D}{2A} = y'.$$

On a deux conditions, quand on connaît une directrice ou une asymptote; car, en égalant les coefficients de l'une de ces deux lignes aux deux constantes qui déterminent sa position, on forme deux équations entre les coefficients de l'équation (1).

Il faut examiner attentivement les conditions énoncées pour ne pas s'exposer à compter deux fois la même : ainsi, quand on donne en même temps le centre et l'asymptote, on n'a que trois conditions, parce que l'asymptote

passant par le centre, une seule constante détermine sa position.

L'équation la plus générale du cercle

$$y^2 + x^2 + 2\cos\theta\, xy + ay + bx + c = 0$$

ne renfermant que trois coefficients ou paramètres; trois conditions seulement sont nécessaires pour déterminer cette courbe.

Quoiqu'il soit facile de voir maintenant quelle est la marche générale à suivre pour déterminer une ligne du second ordre satisfaisant à des conditions données, pour répandre plus de clarté sur ce sujet, nous traiterons la question suivante :

Connaissant pour une parabole deux tangentes OA, OB (fig. 121), *et leurs points de contact* A *et* B, *trouver l'équation de la courbe.*

Nous prendrons les deux tangentes pour axes des coordonnées.

L'équation de la parabole sera de la forme

$$(1) \qquad y^2 + 2axy + a^2x^2 + by + cx + d = 0,$$

puisque les trois premiers termes forment un carré parfait, et qu'on peut réduire à l'unité le coefficient de y^2. Désignons OA par x' et OB par y'. En faisant $y = 0$ dans (1), on obtient l'équation

$$a^2x^2 + cx + d = 0,$$

dont les racines doivent être égales à x'; ce qui conduit à

$$(2) \qquad c^2 - 4a^2d = 0,$$

$$(3) \qquad x' = -\frac{c}{2a^2}.$$

Si l'on fait $x = 0$, l'équation résultante

$$y^2 + by + d = 0$$

aura ses racines égales à y', et l'on trouvera

(4) $$b^2 - 4d = 0,$$

(5) $$y' = -\frac{b}{2}.$$

Les équations (5) et (4) donnent

$$b = -2y', \quad d = y'^2;$$

de (2) et (3) on tire ensuite

$$c = -\frac{2y'^2}{x'}, \quad a^2 = \frac{y'^2}{x'^2};$$

d'où

$$a = \pm\frac{y'}{x'}.$$

En substituant, on arrive aux équations

(6) $$y^2 + \frac{2y'}{x'}xy + \frac{y'^2}{x'^2}x^2 - 2y'y - \frac{2y'^2}{x'}x + y'^2 = 0,$$

(7) $$y^2 - \frac{2y'}{x'}xy + \frac{y'^2}{x'^2}x^2 - 2y'y - \frac{2y'^2}{x'}x + y'^2 = 0.$$

Le premier membre de l'équation (6) est égal à

$$\left(y + \frac{y'}{x'}x - y'\right)^2;$$

par conséquent, cette équation représente une droite. L'équation (7) est celle de la parabole qui touche les droites données aux points A et B.

CHAPITRE TREIZIÈME.

DE LA SIMILITUDE DES COURBES.

226. On dit que *deux courbes sont semblables lorsqu'on peut les placer de telle manière qu'en menant par un même point des rayons vecteurs aux différents points des deux courbes, les rayons vecteurs dirigés suivant la même droite soient proportionnels.*

Considérons les deux courbes ab, AB (*fig.* 122), situées sur un même plan. S'il est possible de placer la courbe ab de telle manière en $a'b'$, que menant par un certain point O dans des directions quelconques, des droites qui rencontrent la courbe AB, en M, M', M'', etc., et la courbe $a'b'$, en m, m', m'', etc., on ait

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{O}m}=\frac{\mathrm{OM'}}{\mathrm{O}m'}=\frac{\mathrm{OM''}}{\mathrm{O}m''}=\ldots,$$

la courbe ab sera semblable à AB.

Si l'on imagine que la courbe $a'b'$ soit reportée en ab, et que les lignes Om, Om', Om'', etc., se placent en on, on', on'', etc., les points O et o, d'où partent les rayons proportionnels, sont nommés *centres de similitude*. Les rayons de l'une des deux courbes font entre eux les mêmes angles que ceux de l'autre courbe auxquels ils sont proportionnels, et qu'on peut appeler *homologues*.

La courbe ab peut avoir telle position que l'on voudra à l'égard de AB, sans cesser de lui être semblable. Quand cette position est telle, que les rayons de l'une soient parallèles à leurs homologues dans l'autre, on dit que les

courbes sont *semblablement situées*. Lorsqu'elles sont disposées comme AB et $a'b'$, de manière que les rayons homologues partent du même point et soient dirigés suivant la même droite, elles ont *même centre de similitude, et situations semblables*.

Le rapport constant qui existe entre les rayons vecteurs homologues se nomme *rapport de similitude*.

227. Proposons-nous actuellement le problème suivant :

L'équation d'une courbe étant donnée, trouver l'équation générale des courbes semblables.

Soit AB (*fig.* 123) la courbe dont on donne l'équation

$$(1) \qquad F(x, y) = 0;$$

en menant de l'origine les rayons OM, OM', etc., et les divisant proportionnellement en m, m', etc., le lieu des points m, m', etc., sera une courbe ab semblable à AB. Si l'on désigne par k le rapport de OM à Om ; par x, y, les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe AB ; par x', y', celles du point homologue m, il est visible qu'on aura

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{O}m} = k,$$

d'où

$$x = kx', \quad y = ky'.$$

En portant ces valeurs dans $F(x, y) = 0$, l'équation résultante

$$(2) \qquad F(kx', ky') = 0$$

comprendra toutes les courbes semblables à la proposée, en donnant au rapport k toutes les valeurs possibles.

Nous devons faire observer que ces courbes auront une situation particulière, puisque l'origine est le centre de similitude commun à elles et à la courbe proposée, et qu'en

outre les rayons vecteurs homologues sont dirigés suivant la même droite.

Donnons à ces courbes une autre situation, et supposons d'abord que les axes OX, OY, se transportant parallèlement à eux-mêmes en $o'X'$, $o'Y'$, la courbe *ab* devienne *cd*. Elle aura, relativement aux nouveaux axes, la même équation (2) que relativement aux anciens. Et, si l'on veut toujours la rapporter à ceux-ci, il faut changer dans cette équation x' en $x'-a$, et y' en $y'-b$, a et b étant les coordonnées du point o' par rapport aux axes OX, OY. On trouve ainsi l'équation

$$(3) \qquad F[k(x-a),\ k(y-b)] = 0,$$

qui représente toutes les courbes semblables à la proposée et semblablement situées.

Cette équation n'a pas encore toute la généralité désirable; pour l'obtenir, il faut que les axes OX, OY, au lieu de se transporter parallèlement à eux-mêmes, soient déplacés d'une manière quelconque dans leur plan. Si l'on suppose qu'ils soient devenus $O'X'$, $O'Y'$ (*fig.* 124), et que *cd* soit la nouvelle position de la courbe *ab*; il est visible que l'équation de *cd* relativement aux nouveaux axes sera encore

$$F(kx', ky') = 0,$$

et il s'agit de trouver quelle équation on doit avoir en rapportant la nouvelle courbe aux mêmes axes OX, OY, que AB.

Les deux systèmes d'axes étant obliques, pour passer des premiers aux derniers, on a les formules

$$x = a + \frac{x'\sin(\theta-\alpha) + y'\sin(\theta-\alpha')}{\sin\theta},$$

$$y = b + \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\alpha'}{\sin\theta},$$

dans lesquelles a et b sont les coordonnées de la nouvelle origine O'; θ l'angle YOX; α, α' les angles X'O'E, Y'O'E, formés par O'X', O'Y', avec une parallèle à l'axe OX.

Dans le cas actuel, on a

$$\alpha' = \theta + \alpha;$$

en introduisant cette condition dans les formules précédentes, on obtient

$$x = a + \frac{x' \sin(\theta - \alpha) - y' \sin\alpha}{\sin\theta},$$

$$y = b + \frac{x' \sin\alpha + y' \sin(\theta + \alpha)}{\sin\theta}.$$

En effectuant quelques calculs qui ne présentent aucune difficulté, on déduit de ces relations les valeurs suivantes pour x' et y' :

$$x' = \frac{(x-a)\sin(\theta+\alpha) + (y-b)\sin\alpha}{\sin\theta},$$

$$y' = \frac{-(x-a)\sin\alpha + (y-b)\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation

$$F(kx', ky') = 0,$$

la courbe cd sera rapportée aux axes primitifs, et l'on aura, de cette manière, l'équation la plus générale des courbes semblables à la courbe donnée.

228. Nous allons appliquer cette théorie générale aux courbes du second ordre. Pour le faire d'abord le plus simplement possible, nous rapporterons l'ellipse et l'hyperbole à leurs axes principaux.

L'équation de la première courbe étant

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0;$$

si l'on prend le centre de la courbe pour centre de simili-

tude, et si l'on désigne toujours par k le rapport de similitude, l'équation des courbes semblables à la proposée sera

$$a^2k^2y'^2 + b^2k^2x'^2 - a^2b^2 = 0,$$

ou, en supprimant les accents,

$$a^2k^2y^2 + b^2k^2x^2 - a^2b^2 = 0.$$

Ce qui apprend que *toutes les courbes semblables à une ellipse sont des ellipses.*

Si dans l'équation générale de ces dernières courbes, on fait successivement $y = 0$, $x = 0$, pour avoir les grandeurs des axes on obtient

$$x = \frac{a}{k}, \quad y = \frac{b}{k}.$$

Donc, pour *que deux ellipses soient semblables, il faut et il suffit que leurs axes soient proportionnels.* On arrive exactement aux mêmes conséquences pour l'hyperbole.

En appliquant la méthode à la parabole $y^2 = 2px$, on obtient

$$k^2y^2 = 2pkx, \quad \text{d'où} \quad y^2 = \frac{2p}{k}x.$$

On en conclut que *toutes les paraboles du second degré sont semblables.*

229. La règle très-simple que l'on vient d'énoncer au sujet des ellipses et des hyperboles, a l'inconvénient d'exiger que l'on rapporte ces courbes à leurs axes principaux, ce qui entraîne dans des calculs assez longs. Il est donc important de chercher une autre règle au moyen de laquelle on puisse facilement connaître, à l'inspection de leurs équations, si deux courbes à centre sont ou ne sont pas semblables.

Soient

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

$$A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0,$$

les équations de deux ellipses ou de deux hyperboles, rapportées à des axes rectangulaires. Si on les rapporte à leurs axes principaux, on aura deux équations de la forme

$$My^2 + Nx^2 + P = 0,$$
$$M'y^2 + N'x^2 + P' = 0;$$

et les longueurs de leurs demi-axes seront données par les formules

$$a = \sqrt{\frac{-P}{N}}, \quad b = \sqrt{\frac{-P}{M}}, \quad a' = \sqrt{\frac{-P'}{N'}}, \quad b' = \sqrt{\frac{-P'}{M'}}.$$

Comme on doit avoir (n° 228) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, il viendra

$$\frac{N'}{N} = \frac{M'}{M}, \quad \text{d'où} \quad \frac{M-N}{M+N} = \frac{M'-N'}{M'+N'};$$

mais on a trouvé (page 162)

$$M + N = A + C, \quad M - N = \sqrt{(A-C)^2 + B^2},$$

donc

$$\frac{\sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{A+C} = \frac{\sqrt{(A'-C')^2 + B'^2}}{A'+C'};$$

élevant au carré et divisant chaque numérateur par le dénominateur correspondant, il vient

$$1 + \frac{B^2 - 4AC}{(A+C)^2} = 1 + \frac{B'^2 - 4A'C'}{(A'+C')^2},$$

d'où

$$(\alpha) \qquad \frac{B^2 - 4AC}{(A+C)^2} = \frac{B'^2 - 4A'C'}{(A'+C')^2}.$$

230. Si l'on veut que les deux courbes semblables soient semblablement placées, il faut que leurs axes homologues soient parallèles, ce qui exige que $\frac{-B}{A-C} = \frac{-B'}{A'-C'}$

(page 156). On tire, de l'égalité précédente,

$$\frac{B}{B'}=\frac{A-C}{A'-C'},$$

d'où

$$\frac{B^2}{B'^2}=\frac{(A-C)^2}{(A'-C')^2},\quad \frac{B^2+(A-C)^2}{B'^2+(A'-C')^2}=\frac{B^2}{B'^2},$$

$$\frac{\sqrt{(A-C)^2+B^2}}{\sqrt{(A'-C')^2+B'^2}}=\frac{B}{B'}=\frac{A-C}{A'-C'}.$$

Mais on vient de trouver

$$\frac{\sqrt{(A-C)^2+B^2}}{(A+C)}=\frac{\sqrt{(A'-C')^2+B'^2}}{A'+C'};$$

donc

$$\frac{B}{B'}=\frac{A-C}{A'-C'}=\frac{A+C}{A'+C'},$$

ce qui conduit à

$$\frac{B}{B'}=\frac{A}{A'}=\frac{C}{C'}.$$

Donc, *pour que deux ellipses ou deux hyperboles soient semblables et semblablement placées, il faut et il suffit que dans leurs équations, les coefficients des termes du second degré soient proportionnels.*

Le rapport de similitude des deux courbes est

$$\frac{a}{a'}=\sqrt{\frac{P}{P'}\times\frac{N'}{N}}.$$

La quantité P est celle que nous avons désignée (page 160) par F′, et qui peut être exprimée au moyen des coefficients de l'équation générale. Si, pour abréger, on représente par V le numérateur de F′ ou de P, on aura

$$P=\frac{V}{B^2-4AC};$$

de sorte que

$$\frac{P}{P'}=\frac{V}{V'}\times\frac{B'^2-4A'C'}{B^2-4AC}=\frac{V}{V'}\times\frac{(A'+C')^2}{(A+C)^2},$$

en vertu de la formule (α).

D'une autre part, le rapport $\frac{N'}{N}$ étant égal à $\frac{M'}{M}$, l'est, par conséquent, à $\frac{M'+N'}{M+N}$, quantité qui est équivalente à $\frac{A'+C'}{A+C}$; donc l'expression du rapport de similitude est

$$\sqrt{\frac{V}{V'}\times\left(\frac{A'+C'}{A+C}\right)^3}.$$

231. Nous avons vu que toute courbe semblable à une parabole est elle-même une parabole, et que toutes les paraboles sont semblables. Cette propriété n'est pas particulière à la parabole, elle convient à toutes les courbes dont l'équation, réduite à sa forme la plus simple, ne renferme qu'une seule constante arbitraire.

Prenons l'équation générale

$$f(x, y, p)=0,$$

renfermant la seule constante p, et qui est homogène par rapport aux trois quantités x, y, p, comme on le voit dans l'équation

$$y^3-3pxy+x^3=0.$$

Le changement de x et de y en kx, ky, donne, pour les courbes semblables, l'équation

$$f(kx, ky, p)=0;$$

si l'on pose $p=kp'$, elle devient

$$f(kx, ky, kp')=0.$$

Supposons que la somme des exposants dans chaque terme de l'équation proposée soit égale à m; il est visible que k^m

sera facteur commun de l'équation précédente; donc, en divisant par k^m, on aura une équation

$$f(x, y, p') = 0,$$

qui ne différera de la proposée, qu'en ce que p sera remplacé par p'. D'ailleurs, p' pouvant avoir telle grandeur que l'on voudra, à cause du facteur k, on en conclut que toutes les courbes données par l'équation

$$f(x, y, p) = 0,$$

en y faisant varier p, sont semblables entre elles. Il est permis d'ajouter qu'elles sont semblablement situées, et que l'origine est un centre commun de similitude.

232. Prenons encore l'équation $y = \mathrm{M} \log x$, qui représente une famille de courbes nommées *logarithmiques*; ces courbes diffèrent les unes des autres par le coefficient M, mais elles coupent toutes l'axe des x à la même distance $\mathrm{OA} = 1$, puisque $x = 1$ donne $y = 0$.

On reconnaît facilement qu'elles ont pour asymptote la partie inférieure de l'axe des y, car $x = 0$ donne

$$y = -\infty.$$

En remplaçant x, y par $\mathrm{K}x$, $\mathrm{K}y$, il vient

$$\mathrm{K}y = \mathrm{M} \log \mathrm{K}x;$$

d'où, en faisant $\mathrm{M} = \mathrm{M}'\mathrm{K}$,

$$y = \mathrm{M}' \log \mathrm{K}x = \mathrm{M}' \log x + \mathrm{M}' \log \mathrm{K}.$$

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes, en un point de l'axe des Y, dont l'ordonnée soit $\mathrm{M}' \log \mathrm{K}$; en nommant x', y' les nouvelles coordonnées, on aura

$$x = x', \quad y = y' + \mathrm{M}' \log \mathrm{K},$$

et l'équation précédente deviendra

$$y' = \mathrm{M}' \log x',$$

équation qui représente encore une logarithmique. Comme M' peut prendre toutes les grandeurs possibles, il en résulte que toutes les logarithmiques sont semblables.

233. La relation

$$\frac{B^2-4AC}{(A+C)^2}=\frac{B'^2-4A'C'}{(A'+C')^2}$$

obtenue (n° 229), étant satisfaite d'elle-même quand les deux courbes sont des paraboles, on en conclura que cette équation exprime la condition générale de similitude des courbes du second ordre.

Pour exprimer que deux courbes du second ordre sont égales, il faut écrire qu'elles sont semblables et que leur rapport de similitude est l'unité; ce qui donne les deux équations de condition

$$\frac{B^2-4AC}{(A+C)^2}=\frac{B'^2-4A'C'}{(A'+C')^2} \quad \text{et} \quad \frac{V}{V'}=\frac{(A+C)^3}{(A'+C')^3}.$$

Ces deux équations conviennent aux paraboles aussi bien qu'aux deux autres courbes du second ordre, car la première est toujours satisfaite dans le cas de la parabole, et la seconde exprime que les paraboles ont le même paramètre, comme on le vérifie facilement en exprimant dans V et V', que B^2-4AC et $B'^2-4A'C'$ sont nuls.

CHAPITRE QUATORZIÈME.

IDENTITÉ DES COURBES DU SECOND DEGRÉ ET DES SECTIONS CONIQUES ET CYLINDRIQUES.

234. Proposons-nous de déterminer les courbes obtenues en coupant, par un plan, un cône droit à base circulaire. Ces courbes se nomment *sections coniques*.

Soit MON (*fig.* 125) l'intersection du cône et d'un plan quelconque; par l'axe SC menons un plan perpendiculaire à celui de la section, il coupera la surface conique suivant deux génératrices opposées SA, SB; et sa trace sur le plan sécant MON sera une droite OX. Prenons cette droite pour axe des abscisses, et la perpendiculaire OY menée à OX dans le plan de la courbe, pour axe des ordonnées. Par un point quelconque M de la section, conduisons l'ordonnée MP. Posons $OP = x$, $MP = y$; et cherchons la relation générale qui existe entre x et y.

En menant par le point P une perpendiculaire GH à l'axe du cône, le plan conduit par cette perpendiculaire et l'ordonnée MP sera perpendiculaire à l'axe et déterminera, par conséquent, sur la surface conique une circonférence GMH.

La droite MP, intersection des plans GMH, MON, perpendiculaires au plan ASB, est elle-même perpendiculaire à ce dernier plan, et, par suite, au diamètre GH de la circonférence. Il en résulte alors

$$y^2 = \mathrm{GP} \times \mathrm{PH}.$$

Nommons 2β l'angle au sommet du cône, α l'angle SOX, et d la distance SO; on comprend que la forme et les dimensions de la courbe dépendent de ces quantités; et que pour obtenir son équation, il faut exprimer GP, PH en fonction de x, de y, et de ces mêmes quantités.

A cet effet, menons PD parallèle à SB et OKL perpendiculaire à l'axe SC, et rencontrant au point I la droite PD.

Le triangle POG donne

$$GP : x :: \sin\alpha : \cos\beta,$$

d'où

$$GP = \frac{x \sin\alpha}{\cos\beta}.$$

Pour obtenir PH, nous ferons remarquer que l'on a

$$PH = 2\,OK - OI.$$

Mais

$$OK = d.\sin\beta,$$

et le triangle OPI donne

$$OI : x :: \sin(\alpha + 2\beta) : \cos\beta;$$

car l'angle OPD est supplémentaire de POD + ODP, et

$$\sin OIP = \sin OLS = \cos\beta.$$

Donc,

$$OI = \frac{x.\sin(\alpha + 2\beta)}{\cos\beta};$$

par conséquent,

$$PH = 2d\sin\beta - \frac{x\sin(\alpha + 2\beta)}{\cos\beta};$$

et enfin

$$(1) \qquad y^2 = \frac{2d\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta}\,x - \frac{\sin\alpha.\sin(\alpha + 2\beta)}{\cos^2\beta}\,x^2.$$

Donc, *les sections coniques sont des courbes du second ordre*.

Avant de démontrer la réciproque, nous allons examiner les positions que doit avoir le plan coupant pour donner successivement l'ellipse, l'hyperbole et la parabole.

Pour la première courbe, le coefficient de x^2 doit être négatif; on doit donc avoir

$$\frac{\sin\alpha.\sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta} > 0.$$

Or, il est permis de regarder $\sin\alpha$ comme positif. En effet, si l'on applique OX sur OS, et si l'on fait tourner la première ligne autour du point O, jusqu'à ce qu'elle s'applique de nouveau sur SA, l'angle α, d'abord nul, sera devenu égal à 180 degrés; et si l'on continue à faire mouvoir OX, cette ligne prendra une position semblable à celle qu'elle avait lorsque l'angle α était plus petit que 180 degrés.

Comme $\cos^2\beta$ est positif, la condition

$$\frac{\sin\alpha.\sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta} > 0$$

revient à

$$\sin(\alpha+2\beta) > 0.$$

Dans ce cas, on voit facilement que la trace OX, du plan sécant sur ASB, coupe la génératrice SB sur la nappe ASB de la surface conique, et que, par conséquent, le plan coupant rencontrant toutes les génératrices sur une même nappe de la surface, la courbe déterminée est rentrante et fermée; ce qui s'accorde avec la forme connue de l'ellipse.

Si l'on a $\alpha+2\beta > 180°$, la trace OX coupe la génératrice SB sur son prolongement SB', de sorte que le plan sécant rencontre une partie seulement des génératrices des deux nappes; il en résulte donc deux branches de courbes

qui s'étendent indéfiniment chacune sur une seule nappe. C'est la forme de l'hyperbole.

Enfin, si $\alpha + 2\beta = 180^\circ$, OX est parallèle à SB, et le plan sécant rencontre toutes les génératrices, excepté SB, sur la nappe ASB, d'où il résulte une courbe formée d'une seule branche s'étendant indéfiniment sur cette nappe; on a donc la parabole.

Si l'on désigne par $-k$ le coefficient de x^2 de l'équation (1), et si l'on suppose $d = 0$, dans la même équation, elle deviendra

$$y^2 + kx^2 = 0,$$

et représentera un point, deux droites qui se coupent, ou une seule droite, suivant qu'on aura

$$\alpha + 2\beta < 180, \quad > 180, \quad \text{ou} \quad = 180^\circ.$$

L'hypothèse $\alpha = 90^\circ - \beta$, introduite dans l'équation (1), rend les facteurs $\sin\alpha$, $\sin\alpha + 2\beta$ égaux à $\cos\beta$, et conduit à une équation de la forme

$$y^2 = hx - x^2,$$

qui représente une circonférence de cercle, puisque les coordonnées sont rectangulaires. Dans le cas dont il s'agit, le plan coupant est perpendiculaire à l'axe du cône.

On conclut de ce qui précède, que l'équation (1) peut représenter : 1° une ellipse, un cercle et un point; 2° une hyperbole et deux droites qui se coupent; 3° une parabole et une ligne droite.

On voit qu'elle ne peut jamais représenter deux parallèles, ou une ligne imaginaire, et que, par conséquent, elle est moins générale que l'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

235. Occupons-nous maintenant de la question inverse de celle que nous venons de résoudre.

Supposons donc que l'on demande de couper un cône par un plan, de manière que l'intersection soit une courbe donnée du second ordre.

En rapportant cette dernière courbe à l'un de ses axes, et à la tangente à l'un des sommets, on sait que son équation sera de la forme

$$(2) \qquad y^2 = 2px + qx^2;$$

$2p$ désignant le paramètre et q le carré du rapport du second axe au premier (abstraction faite du signe).

Il s'agit de savoir, les quantités p, q, 6, d, étant données, si l'on peut déterminer pour d et α des valeurs réelles et finies, qui rendent l'équation (1) identique avec (2).

En égalant respectivement les coefficients de x et de x^2 dans les deux équations, il vient

$$(3) \qquad \frac{d \sin \alpha . \sin 6}{\cos 6} = p,$$

$$(4) \qquad \frac{\sin \alpha . \sin (\alpha + 2 6)}{\cos^2 6} = - q.$$

L'équation (3), étant du premier degré par rapport à d, donnera toujours une valeur réelle pour cette inconnue, si l'on peut tirer de l'équation (4) une valeur de cette espèce pour α.

Pour obtenir ce dernier angle, nous allons changer la forme de l'équation (4). A cet effet, nous rappellerons que la trigonométrie donne, en général,

$$2 \sin A \sin B = \cos (A - B) - \cos (A + B);$$

d'où nous tirons

$$\cos 2 6 - \cos (2 \alpha + 2 6) = 2 \sin \alpha . \sin (\alpha + 2 6),$$

et, par suite, l'équation (4) devient

$$\cos 2 6 - \cos (2 \alpha + 2 6) = - 2 q \cos^2 6.$$

On en déduit

$$\cos(2\alpha + 2\beta) = \cos 2\beta + 2q\cos^2\beta.$$

Or,

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1;$$

donc enfin

$$\cos(2\alpha + 2\beta) = 2(1+q)\cos^2\beta - 1.$$

Dans l'ellipse, le rapport q est négatif et < 1. Il en résulte que la valeur $2(1+q)\cos^2\beta - 1$ est comprise entre 1 et -1; qu'alors l'arc $2\alpha + 2\beta$ est réel, et, par suite, que α l'est aussi.

Donc, *un cône droit étant donné, on peut toujours le couper suivant une ellipse aussi donnée.*

Dans l'hyperbole, q est positif et peut avoir une grandeur quelconque. Si la valeur de $\cos(2\alpha + 2\beta)$ est négative, il est visible qu'elle sera plus petite que l'unité, et, par conséquent, α sera réel. Mais il n'en est plus ainsi quand cette valeur est positive. Dans ce cas, il faut qu'on ait

$$2(1+q)\cos^2\beta - 1 < 1;$$

d'où

$$\cos\beta < \sqrt{\frac{1}{1+q}}.$$

Pour interpréter cette condition, remplaçons q par le carré du rapport des axes; elle devient

$$\cos\beta < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Or, en désignant par θ l'angle des asymptotes avec l'axe transverse, on a

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

donc

$$\cos\beta < \cos\theta,$$

d'où

$$\beta > \theta \quad \text{et} \quad 2\beta > 2\theta.$$

On voit par là que, *pour placer une hyperbole sur un cône droit, il faut que l'angle au sommet de ce cône soit au moins égal à celui des asymptotes de la courbe.*

Dans la parabole, $q = 0$; alors l'équation (4) donne, ou

$$\sin\alpha = 0, \quad \text{ou} \quad \sin(\alpha + 2\beta) = 0.$$

La première valeur doit être rejetée, puisqu'en la mettant dans l'équation (3), on aurait

$$p = 0,$$

et que l'équation (2) ne représenterait plus une parabole.

On doit donc prendre

$$\sin(\alpha + 2\beta) = 0.$$

Or $\alpha + 2\beta$ est moindre que 360 degrés; il faut donc poser

$$\alpha + 2\beta = 0, \quad \text{ou} \quad \alpha + 2\beta = 180°.$$

On peut négliger l'égalité $\alpha + 2\beta = 0$, qui donne pour α une valeur négative. Quant à l'égalité $\alpha + 2\beta = 180°$, elle montre que la ligne OX doit être parallèle à SB. C'est ce qui doit arriver dans le cas de la parabole. Ainsi, *toutes les paraboles peuvent s'obtenir en coupant un cône droit par des plans.*

Remarque. — Les ellipses ou les hyperboles que l'on trouve en coupant un cône droit par des plans parallèles, sont des courbes semblables. En effet, l'angle α restant le même, le coefficient de x^2 dans l'équation des sections du cône ne change pas : or ce coefficient représente, abstraction faite du signe, le carré du rapport des axes; ces derniers sont alors proportionnels, et, par suite, les courbes de même nom sont semblables.

236. En suivant la même marche que pour le cône, on

peut obtenir l'équation générale de l'intersection d'un cylindre droit à base circulaire par un plan.

En effet, soit OMC (*fig.* 126) la courbe déterminée par un plan quelconque; en faisant les mêmes constructions que pour le cône, on arrivera à la relation

$$\overline{MP}^2 = PG \times PH,$$

ou, en désignant par x, y, les coordonnées d'un point quelconque M de la section,

$$y^2 = PG \times PH.$$

Or, si l'on désigne toujours par α l'angle AOX, et par r le rayon du cylindre, on aura

$$GP = x \sin\alpha \quad \text{et} \quad PH = 2r - x\sin\alpha\,;$$

d'où

$$(1) \qquad y^2 = 2rx\sin\alpha - x^2\sin^2\alpha.$$

Cette équation peut être mise sous la forme

$$y^2 = \sin^2\alpha\left(\frac{2r}{\sin\alpha}x - x^2\right).$$

En comparant cette dernière équation à

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

on a

$$\frac{b}{a} = \sin\alpha, \quad \text{et} \quad \frac{r}{\sin\alpha} = a;$$

d'où l'on tire

$$b = a.\sin\alpha = r.$$

Donc, *les sections faites dans une surface cylindrique droite à base circulaire par des plans inclinés sur cette base, sont des ellipses qui ont toutes pour petit axe le diamètre du cylindre.*

Puisqu'en faisant

$$\frac{r}{\sin \alpha} = a, \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{b}{a},$$

on obtient

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

l'égalité $a = \frac{r}{\sin \alpha}$ montre que si l'angle α diminue, le premier axe de l'ellipse peut devenir aussi grand qu'on voudra. *On pourra donc placer sur un cylindre une ellipse donnée, quelle que soit la longueur de son grand axe, pourvu que le petit axe soit égal au diamètre du cylindre.*

L'équation

$$y^2 = 2rx \sin \alpha - x^2 \sin^2 \alpha$$

peut être déduite de l'équation des sections coniques

$$y^2 = \frac{2d \sin \alpha \sin 6}{\cos 6} x - \frac{\sin \alpha . \sin(\alpha + 2 6)}{\cos^2 6} \cdot x^2;$$

mais il faut d'abord introduire dans celle-ci la distance OK (*fig.* 125). Faisons

$$\text{OK} = r;$$

le triangle OSK donne

$$r = d \sin 6,$$

et l'équation précédente devient

$$y^2 = \frac{2r \sin \alpha}{\cos 6} x - \frac{\sin \alpha . \sin(\alpha + 2 6)}{\cos^2 6} x^2.$$

Alors, si l'on suppose $6 = 0$, les génératrices AA', BB' (*fig.* 125), deviennent parallèles, et le cône se change en cylindre. Par cette hypothèse, l'équation se réduit à

$$y^2 = 2r \sin \alpha . x - \sin^2 \alpha . x^2.$$

237. Les trois courbes du second ordre peuvent être obtenues en coupant par un plan un cône oblique à base circulaire.

Menons par l'axe du cône un plan perpendiculaire à sa base, et soit ASB (*fig.* 127) la section résultante qu'on nomme *section principale*. Représentons par γ, δ, les angles SAB, SBA. Cela fait, par un point O de la génératrice SA, conduisons un plan perpendiculaire à celui de la section principale, et désignons par OX l'intersection des deux plans. La position du plan coupant sera déterminée par la distance $SO = d$, et par l'angle $SOX = \alpha$. En conduisant par un point quelconque M de la section conique un plan parallèle à celui de la base, l'intersection sera un cercle EMF, et la droite MP qui joint le point M au point P, où les lignes OX et EF se rencontrent, sera perpendiculaire au plan ASB. Par conséquent, on aura d'abord

$$y^2 = EP \times PF;$$

mais

$$EP : PO :: \sin EOP : \sin PEO,$$

ou

$$EP : x :: \sin\alpha : \sin\gamma;$$

d'où

$$EP = \frac{x \sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

D'ailleurs, en menant PIL parallèle à SB, et OIG parallèle à EF, on aura

$$PF = OG - OI \quad \text{et} \quad OG : d :: \sin(\gamma + \delta) : \sin\delta;$$

d'où

$$OG = \frac{d.\sin(\gamma + \delta)}{\sin\delta}.$$

De plus,

$$OI : OP :: \sin OPI : \sin OIP,$$

ou

$$OI : x :: \sin(\gamma + \delta - \alpha) : \sin\delta;$$

ce qui donne

$$OI = \frac{x.\sin(\delta + \gamma - \alpha)}{\sin\delta}.$$

Il en résulte

$$\mathrm{PF} = \frac{d \sin(\gamma + \delta)}{\sin \delta} - \frac{x \sin(\gamma + \delta - \alpha)}{\sin \delta},$$

et, par suite,

$$y^2 = \frac{d \sin \alpha \sin(\gamma + \delta)}{\sin \gamma . \sin \delta} x - \frac{\sin \alpha \sin(\gamma + \delta - \alpha)}{\sin \gamma . \sin \delta} x^2,$$

équation du second degré qui représentera les trois courbes, selon qu'on aura

$$\gamma + \delta - \alpha > 0, \quad < 0, \quad = 0;$$

car la valeur absolue de $\gamma + \delta - \alpha$ est moindre que 180 degrés.

En nommant s l'angle ASB, les conditions précédentes reviennent à

$$\alpha + S < 180^\circ, \quad > 180^\circ, \quad = 180^\circ.$$

238. Examinons si la section peut être une circonférence : il faut pour cela que

$$\sin \alpha \sin(\gamma + \delta - \alpha) = \sin \gamma \sin \delta,$$

ou, en remplaçant le produit de deux sinus par la différence de deux cosinus,

$$\cos(\gamma + \delta) - \cos(2\alpha - \gamma - \delta) = \cos(\gamma + \delta) - \cos(\gamma - \delta),$$

équation qui se réduit à

$$\cos(2\alpha - \gamma - \delta) = \cos(\gamma - \delta).$$

Pour que deux arcs aient le même cosinus, il faut et il suffit que leur somme ou leur différence soit un multiple pair de la demi-circonférence; on aura donc toutes les solutions de cette équation en posant

$$2\alpha - \gamma - \delta + \gamma - \delta = 2k\pi, \quad \text{d'où} \quad \alpha - \delta = k\pi,$$

$$2\alpha - \gamma - \delta - \gamma + \delta = 2k\pi, \quad \text{d'où} \quad \alpha - \gamma = k\pi.$$

Or, les angles α, γ, δ sont moindres que 180 degrés; donc

$$k = 0,$$

et, par suite,

$$\alpha = \gamma, \quad \text{ou} \quad \alpha = \delta.$$

On voit par là que la section est une circonférence lorsque le plan coupant est parallèle à la base, ce qu'on savait déjà, et lorsque ce plan est dirigé de manière qu'il fasse avec la génératrice SA un angle SOX égal à l'inclinaison de SB sur la base.

Cette seconde section est dite *antiparallèle*, ou *souscontraire*.

239. Cherchons actuellement l'équation générale de l'intersection d'un cylindre oblique à base circulaire et d'un plan.

Par l'axe CC′ (*fig.* 128) du cylindre conduisons un plan perpendiculaire aux bases du cylindre, soit ABA′B′ la section résultante qu'on nomme *section principale;* représentons par δ, γ, les angles BB′A′, AA′B; et, par un point O de la génératrice AA′, conduisons un plan perpendiculaire à celui de la section principale. Soient OX l'intersection de ces deux plans, et α l'angle AOX.

En menant par un point M de la section du cylindre un plan parallèle à la base A′B′, il coupera la surface cylindrique suivant une circonférence FMG, et le plan ABA′B′ suivant la droite FG parallèle à A′B′. La droite MP, qui unit le point M au point de rencontre P des droites OX, FG, sera perpendiculaire au plan de la section principale AA′BB′. On aura donc

$$\overline{MP}^2 = FP \times PG.$$

Si l'on prend pour axe des y la droite OY perpendiculaire à OX, il viendra

$$y^2 = FP \times PG.$$

On aura aussi

$$FP : OP :: \sin\alpha : \sin OFP,$$

ou

$$FP : x :: \sin\alpha : \sin\gamma ;$$

d'où

$$FP = \frac{x \sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

D'ailleurs, en nommant r le rayon des bases du cylindre, on a

$$PG = 2r - FP = 2r - \frac{x \sin\alpha}{\sin\gamma} :$$

par conséquent,

$$y^2 = \frac{2r \sin\alpha}{\sin\gamma} x - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\gamma} x^2,$$

équation qui représente une ellipse.

Pour que la section soit une circonférence, il faut que $\sin^2\alpha = \sin^2\gamma$. Comme les angles α, γ, sont moindres que 180 degrés, la condition $\sin^2\alpha = \sin^2\gamma$ donne

$$\alpha = \gamma, \quad \text{ou} \quad \alpha = 180^\circ - \gamma = \delta.$$

On obtient donc un cercle en coupant le cylindre par des plans qui forment avec AA′ des angles égaux à BB′A′ ou δ. Le cercle obtenu en prenant $\alpha = \delta$ est encore nommé section *antiparallèle*, ou *sous-contraire*.

CHAPITRE QUINZIÈME.

DES COORDONNÉES POLAIRES.

Définitions. Formules générales.

240. Jusqu'à présent nous avons déterminé la position des différents points d'un plan, en les rapportant à deux axes tracés dans ce plan; mais on peut fixer la position de chacun de ces points au moyen de sa distance MF (*fig.* 129) à un point F donné sur le plan, et de l'angle MFG que la droite MF fait avec une droite FG connue de position.

Le point fixe F se nomme le *pôle* ou origine; la droite FG est l'axe polaire; la distance MF est le *rayon vecteur* du point M, et MFG est l'angle décrit par le rayon vecteur.

Le rayon vecteur FM et l'angle correspondant MFG sont appelés coordonnées *polaires* du point M.

Pour montrer la correspondance du rayon vecteur et de l'angle, on suppose qu'une droite FK, passant par le point F, soit d'abord appliquée sur FG et que cette droite FK tourne autour du pôle F, toujours dans le même sens : alors un point pris arbitrairement sur cette ligne décrit un arc qui peut croître jusqu'à l'infini; et si FK tourne en sens contraire, l'arc décrit sera négatif et pourra croître jusqu'à $-\infty$. C'est cet arc qui mesure l'angle formé par le rayon vecteur et l'axe polaire. Nous désignerons dorénavant par ω l'angle dont il s'agit.

Quant au rayon vecteur FM, nous le représenterons par ρ, et il pourra recevoir toutes les valeurs possibles,

soit positives, soit négatives. Les premières se rapportent aux points situés sur le rayon vecteur même, et les dernières aux points placés sur son prolongement de l'autre côté du pôle.

D'après ce que l'on vient de dire, quand on donnera pour les variables ω et ρ des valeurs particulières, on pourra fixer la position du point auquel se rapportent ces coordonnées.

Soient, par exemple, $\omega = 316^\circ$ et $\rho = 4$; on prendra l'arc $\delta\gamma\mathrm{6} = 316^\circ$, et l'on mènera la droite F6M', sur laquelle on portera dans le sens F6 la distance FM' égale à 4. Si l'on donnait $\omega = 316^\circ$, et $\rho = -4$, il faudrait prendre FM'' $= 4$ sur le prolongement de F6 de l'autre côté du pôle F.

241. Cherchons, maintenant, les formules qui servent à passer d'un système de coordonnées rectilignes quelconques à un système de coordonnées polaires.

Soient AP et MP (*fig.* 130) les coordonnées rectilignes d'un point quelconque M rapporté aux axes AX, AY ; F le pôle, et FG l'axe polaire ; on aura

$$\mathrm{AP} = x, \quad \mathrm{MP} = y.$$

L'angle MFG et la distance FM représentant les coordonnées polaires du même point, on fera

$$\mathrm{MFG} = \omega \quad \text{et} \quad \mathrm{FM} = \rho.$$

Menons parallèlement aux premiers axes les droites FX', FY', qui coupent MP en D, et AX en B. Désignons par a et b les coordonnées AB, BF du pôle F ; par α l'angle GFX', et par θ l'angle YAX, ou Y'FX'.

On aura d'abord

$$x = a + \mathrm{FD}, \quad y = b + \mathrm{MD}.$$

Or, le triangle FMD donne

$$\frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{FM}} = \frac{\sin \mathrm{FMD}}{\sin \mathrm{MDF}} = \frac{\sin \mathrm{Y'FM}}{\sin \mathrm{MDX'}},$$

ou

$$\frac{\mathrm{FD}}{\rho} = \frac{\sin(\theta - \omega - \alpha)}{\sin\theta};$$

d'où

$$\mathrm{FD} = \rho.\frac{\sin(\theta - \omega - \alpha)}{\sin\theta}.$$

On déduit du même triangle

$$\frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{MF}} = \frac{\sin \mathrm{MFD}}{\sin \mathrm{MDF}},$$

ou

$$\frac{\mathrm{MD}}{\rho} = \frac{\sin(\omega + \alpha)}{\sin\theta};$$

ce qui conduit à

$$\mathrm{MD} = \rho.\frac{\sin(\omega + \alpha)}{\sin\theta}.$$

En portant ces valeurs de FD et de MD dans celles de x et de y, on obtient

$$(1) \quad x = a + \rho.\frac{\sin(\theta - \omega - \alpha)}{\sin\theta}, \quad y = b + \rho.\frac{\sin(\omega + \alpha)}{\sin\theta}.$$

Lorsque les coordonnées x, y, sont rectangulaires, on a

$$\theta = 90^\circ,$$

et, par suite,

$$(2) \quad x = a + \rho.\cos(\omega + \alpha), \quad y = b + \rho.\sin(\omega + \alpha),$$

formules que l'on pourrait obtenir directement.

Quand l'axe polaire est parallèle à l'axe des x, $\alpha = 0$, et, en supposant les coordonnées x, y, rectangulaires, on trouve

$$x = a + \rho\cos\omega, \quad y = b + \rho\sin\omega.$$

Les formules (1) sont rarement employées, mais on fait souvent usage des formules (2). En partant de ces dernières formules, proposons-nous de transformer les coordonnées polaires en coordonnées rectilignes. Pour y parve-

nir, nous ferons remarquer que des formules (2) on tire successivement

$$x - a = \rho.\cos(\omega + \alpha), \quad y - b = \rho.\sin(\omega + \alpha),$$

$$\text{tang}(\omega + \alpha) = \frac{y - b}{x - a}, \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = \rho^2,$$

$$\rho = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Les formules demandées sont donc

$$\text{tang}(\omega + \alpha) = \frac{y - b}{x - a}, \quad \rho = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Si l'on prenait l'axe polaire pour axe des x, et le pôle pour origine, on aurait

$$\alpha = 0, \quad b = 0, \quad a = 0;$$

ce qui conduirait à

$$\text{tang}\,\omega = \frac{y}{x}, \quad \rho = \sqrt{y^2 + x^2}.$$

242. *Distance de deux points en coordonnées polaires.* — Soient O le pôle, OZ l'axe polaire, et M', M'', les deux points considérés (*fig.* 131). En représentant par ω', ρ', les coordonnées du point M', et par ω'', ρ'', les coordonnées du point M''; si l'on désigne par δ la distance M'M'', on aura, d'après une proposition connue,

$$\delta^2 = \rho'^2 + \rho''^2 - 2\rho'\rho'' \cos(\omega'' - \omega'),$$

d'où

$$\delta = \sqrt{\rho'^2 + \rho''^2 - 2\rho'\rho'' \cos(\omega'' - \omega')}.$$

243. *Équation polaire de la ligne droite.* — Soient O le pôle, OZ l'axe polaire (*fig.* 132). Une droite AB sera déterminée de position, quand on connaîtra l'angle BAO $= \alpha$ qu'elle fait avec l'axe polaire, et la longueur p de la perpendiculaire OP abaissée du pôle sur cette droite. C'est donc en fonction de ces données que nous allons déterminer

son équation. Pour cela, soit M un point quelconque de la droite; en faisant $OM = \rho$, $MOZ = \omega$, le triangle rectangle MOP donne

$$p = \rho . \sin OMP = \rho . \sin (MOZ - MAZ) = \rho . \sin (\omega - \alpha);$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad \rho = \frac{p}{\sin(\omega - \alpha)}.$$

Telle est l'équation de la droite.

En faisant $\omega = 0$, on a

$$\rho = -\frac{p}{\sin \alpha},$$

ce qui détermine le point A de la droite. Si ω croît depuis o jusqu'à α, les valeurs de ρ, toujours négatives, iront en croissant numériquement depuis $\frac{p}{\sin \alpha}$ jusqu'à l'infini; ce qui donne la partie de la droite située au-dessous de l'axe polaire.

De $\omega = \alpha$ à $\omega = 90^\circ + \alpha$, les valeurs de ρ sont positives et décroissantes. L'équation donne alors tous les points de la partie de la droite placée au-dessus de l'axe polaire jusqu'au point P, qui est déterminé par l'hypothèse

$$\omega = \alpha + 90^\circ, \quad \text{ou} \quad \omega - \alpha = 90^\circ.$$

En continuant de faire croître ω jusqu'à 180 degrés, les valeurs de ρ croissent depuis p jusqu'à OA, et font connaître la partie PA de la droite.

Remarque. — Lorsque la droite (1) passe par le pôle, on a

$$p = 0;$$

pour que ρ puisse prendre différentes valeurs, il faut qu'on ait aussi

$$\sin(\omega - \alpha) = 0, \quad \text{d'où} \quad \omega = \alpha.$$

Telle est, alors, l'équation de la droite. On la trouve aussi

d'une manière directe en observant que toutes les valeurs de ω sont égales à l'angle que la droite fait avec l'axe polaire, quelque valeur qu'on donne à ρ.

Si $\alpha = 0$, sans que p soit nul, la droite est parallèle à l'axe polaire, et son équation devient

$$\rho = \frac{p}{\sin\omega}.$$

Dans l'hypothèse $\alpha = 90°$, la droite est perpendiculaire à l'axe, et l'on a

$$\rho = -\frac{p}{\cos\omega}, \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{p}{\cos\omega},$$

en supposant p négatif.

244. En développant $\sin(\omega - \alpha)$, et en posant

$$h = \cos\alpha, \quad k = -\sin\alpha,$$

l'équation (1) pourra être mise sous la forme

$$\rho = \frac{p}{h\sin\omega + k\cos\omega},$$

h et k étant liés par la relation $h^2 + k^2 = 1$.

Pour construire une droite donnée par son équation polaire, on déterminera deux quelconques de ses points, ceux, par exemple, qui correspondent à

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad \omega = 90°.$$

Soit la droite $\rho = \dfrac{5}{2\sin\omega + 3\cos\omega}$. En faisant successivement $\omega = 0$ et $\omega = 90°$, on a

$$\rho = \frac{5}{3}, \quad \rho = \frac{5}{2}.$$

Si l'on prend $OA = \frac{5}{3}$ (*fig.* 133), et la perpendiculaire

$OB = \frac{5}{2}$, AB sera la droite représentée par l'équation donnée.

245. *Cherchons l'équation d'une droite qui passe par deux points donnés ω', ρ' ; ω'', ρ''.*

Cette équation est de la forme

$$(2) \qquad \rho = \frac{p}{h \sin \omega + k \cos \omega}.$$

Il faut déterminer p, h, k, en fonction de ω', ρ'; ω'', ρ''. En exprimant que les points donnés appartiennent à la droite, on aura les deux équations

$$\rho' = \frac{p}{h \sin \omega' + k \cos \omega'},$$

$$\rho'' = \frac{p}{h \sin \omega'' + k \cos \omega''};$$

d'où l'on tire, par un calcul facile,

$$h = \frac{(\rho' \cos \omega' - \rho'' \cos \omega'')\, p}{\rho' \rho'' \sin (\omega'' - \omega')},$$

$$k = -\frac{(\rho' \sin \omega' - \rho'' \sin \omega'')\, p}{\rho' \rho'' \sin (\omega'' - \omega')};$$

en portant ces valeurs dans l'équation (2), p disparaît et l'on a

$$\rho = \frac{\rho' \rho'' \sin (\omega'' - \omega')}{\rho' \sin (\omega - \omega') - \rho'' \sin (\omega - \omega'')}.$$

246. *Déterminer les coordonnées polaires du point de rencontre de deux droites.*

Soient

$$\rho = \frac{p}{h \sin \omega + k \cos \omega}, \quad \rho = \frac{p'}{h' \sin \omega + k' \cos \omega},$$

les équations de deux droites ; on aura les coordonnées de

leur point de rencontre, en cherchant les valeurs de ρ et de ω qui satisfont à leurs équations.

L'élimination de ρ conduit à

$$\frac{p}{h\sin\omega + k\cos\omega} = \frac{p'}{h'\sin\omega + k'\cos\omega}.$$

En faisant disparaître les dénominateurs, et en divisant par $\cos\omega$, on trouve

$$\operatorname{tang}\omega = -\frac{kp' - k'p}{hp' - h'p};$$

d'où

$$\sin\omega = -\frac{kp' - k'p}{\sqrt{(kp' - k'p)^2 + (hp' - h'p)^2}},$$

$$\cos\omega = -\frac{hp' - h'p}{\sqrt{(kp' - k'p)^2 + (hp' - h'p)^2}}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation de l'une des droites, on obtient

$$\rho = \frac{\sqrt{(kp' - k'p)^2 + (hp' - ph')}}{(hk' - h'k)}.$$

Lorsqu'on suppose $h' = h$, $k' = k$, le dénominateur de la valeur de ρ est nul sans que le numérateur le soit, car p' est différent de p. La valeur de ρ est alors infinie, le point d'intersection des deux droites est à une distance infinie, les deux droites sont parallèles.

Il résulte de là que si $\rho = \frac{p}{h\sin\omega + k\cos\omega}$ représente une droite donnée, l'équation $\rho = \frac{p'}{h\sin\omega + k\cos\omega}$ sera celle d'une parallèle quelconque à cette droite.

Si l'on voulait que la seconde droite passât par le point dont les coordonnées sont ω' et ρ', on aurait

$$\rho' = \frac{p'}{h\sin\omega' + k\cos\omega'},$$

d'où l'on tirerait

$$p' = \rho'(h \sin\omega' + k \cos\omega'),$$

et, par suite,

$$\rho = \frac{\rho'.(h \sin\omega' + k \cos\omega')}{h \sin\omega + k \cos\omega}.$$

247. Cherchons, actuellement, l'angle de deux droites

$$\rho = \frac{p}{h \sin\omega + k \cos\omega}, \quad \rho = \frac{p'}{h' \sin\omega + k' \cos\omega}.$$

En désignant par α et α' les angles que ces droites font avec l'axe, et par θ celui qu'elles forment entre elles, on aura

$$\theta = \alpha - \alpha', \quad \tang\theta = \frac{\tang\alpha - \tang\alpha'}{1 + \tang\alpha . \tang\alpha'}.$$

Or,

$$\tang\alpha = -\frac{k}{h}, \quad \tang\alpha' = -\frac{k'}{h'};$$

donc

$$\tang\theta = \frac{+hk' - h'k}{hh' + kk'}.$$

Si les droites sont parallèles, $\tang\theta = 0$, et l'on a

$$hk' - h'k = 0,$$

comme précédemment.

Si elles sont perpendiculaires, $\tang\theta = \infty$, et l'on a

$$hh' + kk' = 0, \quad \text{et} \quad hk' - h'k < \text{ou} > 0;$$

conditions auxquelles on satisfait en posant

$$h' = k, \quad k' = -h.$$

L'équation d'une perpendiculaire quelconque à la première des droites précédentes sera donc

$$\rho = \frac{p'}{k \sin\omega - h \cos\omega}.$$

Si l'on voulait que cette dernière ligne passât par un point donné (ω', ρ'), on trouverait

$$\rho = \frac{\rho'(k \sin \omega' - h \cos \omega')}{k \sin \omega - h \cos \omega}.$$

Les problèmes sur la perpendiculaire se résolvent plus facilement lorsque l'équation de la droite donnée est sous la forme $\rho = \frac{p}{\sin(\omega - \alpha)}$. En effet, pour qu'une autre droite $\rho = \frac{p'}{\sin(\omega - \alpha')}$ soit perpendiculaire à la première, il suffit que

$$\alpha' - \alpha = 90^\circ; \quad \text{d'où} \quad \alpha' = 90^\circ + \alpha.$$

Cette valeur de α', portée dans la dernière équation, donne

$$\rho = -\frac{p'}{\cos(\omega - \alpha)}, \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{p'}{\cos(\omega - \alpha)},$$

puisque le signe de p' n'est pas déterminé.

La longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point connu (ω', ρ') sur la première droite est

$$\rho' \sin(\omega' - \alpha) - p,$$

expression qui deviendrait $\rho' \sin(\omega' - \alpha)$, si la droite passait par le pôle.

248. *Équation polaire du cercle.* — Soient r (*fig.* 134) le rayon CM de la circonférence ; ρ', ω' les coordonnées polaires du centre C ; et ρ, ω, celles d'un point quelconque, M, du cercle : la distance des points (ρ, ω), (ρ', ω') est

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\omega - \omega')} \quad (\text{n}^\circ\ 242).$$

En égalant cette distance à r et élevant au carré, on a l'équation du cercle

$$(1) \qquad \rho^2 - 2\rho'\rho \cos(\omega - \omega') + \rho'^2 - r^2 = 0.$$

Quelque valeur qu'on attribue à ω, on a pour ρ, deux va-

leurs dont le produit est constant et égal à $\rho'^2 - r^2$. D'où l'on conclut aisément les théorèmes relatifs aux sécantes et aux cordes démontrées (n° 58).

Lorsque le pôle est intérieur au cercle, on a $\rho' < r$; par suite, les valeurs de ρ tirées de l'équation (1) sont réelles, quelle que soit celle que l'on donne à ω.

Quand le pôle est placé extérieurement, si l'on résout l'équation (1), l'expression

$$\rho = \rho' \cos(\omega - \omega') \pm \sqrt{r^2 - \rho'^2 \sin^2(\omega - \omega')},$$

à laquelle on parvient, n'est réelle qu'autant que les valeurs attribuées à ω donnent

$$r > \quad \text{ou} \quad = \rho' \sin(\omega - \omega').$$

L'expression

$$\rho' \sin(\omega - \omega')$$

représente la perpendiculaire CK, abaissée du centre sur le rayon vecteur CM. On voit par là que les tangentes menées du pôle à la circonférence sont les limites de position des rayons vecteurs.

En plaçant le pôle sur la circonférence, on a

$$\rho' = r;$$

l'équation (1) est divisible par ρ, et devient

$$\rho = 2r \cos(\omega - \omega').$$

Si l'axe polaire passait par le centre, le pôle étant toujours sur la circonférence, l'équation serait

$$\rho = 2r \cos \omega.$$

Enfin, l'équation du cercle se réduit à $\rho = r$, quand le pôle se confond avec le centre.

249. *Déterminer les conditions de l'intersection et du contact de deux cercles.*

Prenons pour pôle le centre O de l'un des cercles, et pour axe polaire la droite qui joint ce point au centre O' du second cercle. Désignons par r, r', les deux rayons, et par ρ' la distance des centres. L'équation du premier cercle sera

$$\rho = r,$$

et celle du second,

$$\rho^2 - 2\rho'\rho\cos\omega + \rho'^2 - r'^2 = 0.$$

En supposant que ces deux équations existent simultanément, on aura

$$r^2 - 2\rho' r\cos\omega + \rho'^2 - r'^2 = 0;$$

d'où

$$\cos\omega = \frac{r^2 + \rho'^2 - r'^2}{2\rho' r}.$$

Pour qu'il y ait intersection, il faut qu'on ait

$$\cos\omega < 1, \quad \text{ou} \quad r^2 + \rho'^2 - r'^2 < 2\rho' r;$$

ce qui conduit à

$$(r + r' - \rho')(r - \rho' - r') < 0.$$

On peut toujours supposer le pôle au centre du plus grand cercle, et regarder ρ' comme positif; alors l'inégalité précédente donne

$$\rho' < r + r', \quad \text{et} \quad \rho' > r - r';$$

conditions connues.

Lorsque ces conditions sont remplies, on a $\cos\omega < 1$, et, par suite, on trouve pour ω deux valeurs dont la somme est égale à 360 degrés; ce qui détermine deux points situés de part et d'autre de la ligne des centres, à égale distance de cette ligne. Si les deux points se réduisent à un seul, l'angle ω sera nul, et $\cos\omega = 1$. Alors,

$$r^2 + \rho'^2 - r'^2 = 2\rho' r.$$

On en conclut

$$r + r' - \rho' = 0, \quad \text{ou} \quad r - \rho' - r' = 0;$$

ce qui revient à

$$\rho' = r + r', \quad \text{ou} \quad \rho' = r - r';$$

conditions du contact des cercles.

250. *Équation polaire de l'ellipse.* — Prenons pour pôle le foyer F' (*fig.* 136), et pour axe polaire le grand axe de la courbe. Le point M étant un point quelconque de la courbe, si l'on nomme ρ le rayon vecteur F'M, c la distance OF', et ω l'angle variable MF'X; en abaissant du point M la perpendiculaire MP sur l'axe polaire, le triangle rectangle MF'P donnera

$$F'P = \rho \cdot \cos\omega.$$

Or, on a vu (page 176) que

$$\rho = a + \frac{cx}{a} = \frac{a^2 + cx}{a}.$$

Mais

$$x = F'P - c = \rho\cos\omega - c.$$

Substituant cette valeur de x dans l'équation $\rho = \frac{a^2 + cx}{a}$, il vient

$$\rho = \frac{a^2 + c(\rho\cos\omega - c)}{a} = \frac{a^2 - c^2 + c\rho\cos\omega}{a};$$

d'où

$$\rho = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\omega} = \frac{b^2}{a - c\cos\omega}.$$

Divisant les deux termes du second membre par a, et faisant $\frac{b^2}{a} = p$, $\frac{c}{a} = e$, on a

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega}$$

Cette équation caractérise l'ellipse.

En effet, si l'on suppose d'abord $\omega = 0$, on aura

$$\rho = \frac{p}{1-e} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1-\frac{c}{a}} = \frac{b^2}{a-c} = a+c.$$

Ce qui détermine le sommet A.

En faisant croître ω de 0 à 90 degrés, les valeurs de ρ diminuent de $a+c$ à p, et l'on obtient la partie de la courbe comprise entre les points A et K.

Pour les valeurs de ω renfermées entre 90 et 180 degrés, le cosinus étant négatif et croissant, le dénominateur de la valeur de ρ augmente, et, par suite, ρ diminue de p à $\frac{b^2}{a+c} = a-c$; valeur qui correspond au sommet A'. La seconde partie de l'ellipse se déterminerait en faisant varier ω de 180 à 360 degrés.

251. *Équation polaire de l'hyperbole.* — En représentant par c la distance OF (*fig.* 137), par ρ le rayon vecteur FM, on a trouvé (page 232)

$$(1) \qquad \rho = \frac{cx}{a} - a, \quad \text{ou} \quad \rho = -\frac{cx}{a} + a,$$

suivant que le point M est situé sur la branche qui renferme le foyer F, ou sur la branche opposée. Quelle que soit la position du point M, si l'on désigne toujours l'angle MFX par ω, on a

$$x = c + \rho\cos\omega;$$

portant cette valeur dans les équations (1), et faisant

$$\frac{c}{a} = e, \quad \frac{b^2}{a} = p,$$

on obtient

$$(2) \qquad \rho = \frac{p}{1-e\cos\omega},$$

$$(3) \qquad \rho = \frac{-p}{1+e\cos\omega}.$$

On a $e > 1$, puisque c surpasse le demi-axe a.

Nous ferons remarquer que dans les équations (1), ρ doit être positif, et qu'alors cette hypothèse doit être maintenue dans les équations (2) et (3), déduites des équations (1). Dans ce cas, il faudra rejeter les valeurs négatives de la variable ρ; alors, l'équation (2) détermine une branche de l'hyperbole, et l'équation (3) détermine l'autre. Pour le prouver, nous allons discuter successivement les deux équations.

En supposant d'abord le rayon vecteur appliqué sur l'axe polaire, il faut faire $\omega = 0$; et l'équation (2) donne

$$\rho = \frac{p}{1 - e}.$$

Cette valeur est négative, puisque e surpasse l'unité. Il ne correspond donc à cette valeur aucun point de la courbe.

Puisque p est positif, le signe de ρ sera généralement celui du dénominateur $1 - e\cos\omega$; or, en faisant croître ω à partir de zéro, $1 - e\cos\omega$ restera négatif jusqu'à ce qu'on ait

$$1 - e\cos\omega = 0, \quad \text{d'où} \quad \cos\omega = \frac{1}{e}.$$

Si dans la dernière expression on remplace e par sa valeur $\frac{c}{a}$, on aura

$$\cos\omega = \frac{a}{c}.$$

Cette valeur de $\cos\omega$ est celle qui convient à l'angle que l'asymptote OL (*fig.* 137) fait avec l'axe transverse. Donc, en menant par le foyer la parallèle FK à l'asymptote OL, cette parallèle est la limite jusqu'à laquelle s'élève le rayon vecteur, sans cesser d'être négatif. Représentons par ν l'angle KFX. Lorsque l'angle ω surpasse ν, le dénominateur $1 - e\cos\omega$ devient positif. Pour $\omega = \nu$, on a

$$\rho = \infty.$$

Pour les valeurs de ω comprises entre ν et 90 degrés, celles de ρ vont en décroissant, et lorsque $\omega = 90^\circ$, on obtient

$$\rho = p.$$

On trouve de cette manière l'arc NH.

Au delà de FH, ω continuant d'augmenter, $\cos\omega$ devient négatif; ses valeurs absolument vont en croissant, et ρ diminue encore jusqu'à ce qu'on fasse $\omega = 180^\circ$. Dans cette supposition,

$$\cos\omega = -1, \quad \text{et, par suite,} \quad \rho = \frac{p}{1+e}.$$

Cette valeur est celle du rayon vecteur FA, comme on le reconnaîtrait facilement en remplaçant p par $\frac{b^2}{a}$, et e par $\frac{c}{a}$.

L'hyperbole se trouve déterminée jusqu'au sommet A.

De 180 à 360 degrés, $\cos\omega$ prend les mêmes valeurs, mais dans un sens inverse; d'où il résulte que si l'on fait l'angle K'FX égal à KFX, c'est-à-dire si l'on mène une parallèle à la seconde asymptote, on trouvera dans l'angle OFK', l'arc AH'N'.

Dans l'angle K'FX, le rayon vecteur est négatif, comme il l'était dans l'angle KFX.

Il est inutile de faire croître l'angle ω au delà de 360 degrés, puisque le rayon vecteur prenant les mêmes positions et les mêmes valeurs que précédemment, on n'aurait pas de nouveaux points de la courbe.

L'équation $\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega}$ ne donne que la première branche de l'hyperbole.

Considérons, maintenant, l'équation $\rho = \frac{-p}{1 + c\cos\omega}$. En faisant varier ω de 0 à 90 degrés, le dénominateur restant toujours positif, les valeurs de ρ ne cessent pas d'être né-

gatives; au delà de 90 degrés, le cosinus devenant négatif, il en est de même du second terme $e\cos\omega$; mais les valeurs de ρ seront encore négatives jusqu'à ce qu'on ait

$$1+e\cos\omega=0,$$

d'où l'on tire

$$\cos\omega=-\frac{1}{e}=-\frac{a}{c}.$$

Donc, si l'on mène FK″ parallèle à la seconde asymptote, c'est-à-dire si l'on prolonge FK′, les rayons vecteurs compris dans l'angle K″FX seront négatifs; mais ceux qui seront renfermés dans l'angle K″FX′ seront positifs et décroissants. Quand on fera $\cos\omega=-1$, on trouvera

$$\rho=\frac{-p}{1-e}=\frac{p}{e-1}=c+a.$$

On déterminera, ainsi, l'arc d'hyperbole N″A′. En faisant croître ω de 180 à $180°+\nu$, on trouverait l'arc A′N‴.

En attachant au rayon vecteur la condition d'être positif, les équations (2) et (3) étaient nécessaires pour déterminer les deux branches de l'hyperbole. Mais, si l'on écarte cette restriction, et que, suivant la règle établie, on porte les valeurs négatives sur le prolongement du rayon vecteur, l'équation (2) pourra déterminer la seconde branche de la courbe.

En effet, soit un rayon vecteur FG formant l'angle ω' avec l'axe polaire, l'équation (2) donnera

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\omega'}.$$

Regardons cette valeur comme négative. Pour le prolongement de FG′ de FG, on a

$$\omega=\omega'+180°;$$

cette valeur, portée dans l'équation (3), conduit à

$$\rho=-\frac{p}{1-e\cos\omega'},$$

quantité qui est positive, puisque, par hypothèse, la précédente est négative. Elle fait donc obtenir un point G′ de la branche A′N‴ : ce point est celui qu'on eût trouvé en portant la valeur négative de ρ déduite de l'équation (2) sur le prolongement de FG. Donc, en admettant les valeurs négatives du rayon vecteur, et en les portant dans le sens où elles doivent être comptées, l'équation (2) donnera toute l'hyperbole. La même condition serait remplie par l'équation (3).

252. *Équation polaire de la parabole.* — Plaçons le pôle au foyer F (*fig.* 138), et prenons pour axe polaire l'axe de la courbe. On sait (n° **192**) que

$$\rho = \frac{p}{2} + x.$$

En faisant l'angle MFX $= \omega$, on a

$$x = \frac{p}{2} + \rho \cos \omega.$$

Cette valeur, portée dans l'équation $\rho = \frac{p}{2} + x$, donne

$$(4) \qquad \rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega},$$

pour l'équation polaire de la parabole.

En faisant varier ω de 0 à 360 degrés, on voit facilement que l'équation (4) détermine les points de la parabole.

Si l'on rapproche les équations polaires des trois courbes, on reconnaît que ces lignes peuvent être données par la seule équation

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega},$$

dans laquelle p représente le demi-paramètre. On aura l'ellipse, l'hyperbole ou la parabole, selon que le rapport e sera < 1 ou > 1, ou $= 1$.

CHAPITRE SEIZIÈME.

DES TANGENTES EN GÉNÉRAL.

253. Nous avons dit qu'on nomme *tangente à une courbe en un point donné la limite vers laquelle tend la direction d'une sécante que l'on fait tourner autour de ce point, jusqu'à ce qu'un second point d'intersection se rapprochant indéfiniment du premier, vienne coïncider avec lui.*

Nous ferons observer qu'une droite, tangente à une courbe en un certain point, peut la couper en un ou plusieurs autres points.

Cela posé, cherchons l'équation de la tangente menée au point M (*fig.* 139) d'une courbe *algébrique*, dont l'équation

$$(1) \qquad f(x, y) = 0$$

est supposée entière et rationnelle.

En appelant x', y', les coordonnées du point de contact, nous prendrons sur la même courbe un second point M', ayant pour coordonnées $x' + h$, $y' + k$, et nous joindrons ces deux points par une droite indéfinie SMM'. Son équation sera

$$(2) \qquad y - y' = \frac{k}{h}(x - x'),$$

en y ajoutant les équations

$$f(x', y') = 0, \quad f(x' + h, y' + k) = 0,$$

qui expriment que les points M, M′, appartiennent à la courbe proposée.

Développons la dernière équation, en ayant égard à celle qui la précède immédiatement ; nous aurons

$$(3)\ [*]\qquad \left\{\begin{array}{r} f'_x(x',y')\,h + f''_{x^2}(x',y')\dfrac{h^2}{1.2} + \ldots \\ f'_y(x',y')\,k + 2f''_{xy}(x',y')\dfrac{hk}{1.2} + \ldots \\ + f''_{y^2}(x',y')\dfrac{k^2}{1.2} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Si l'on fait tourner la sécante SMM′ autour du point M, le rapport $\frac{k}{h}$, qui détermine la direction de cette droite, variera et se présentera sous la forme $\frac{0}{0}$, quand le point M′ sera confondu avec M, puisqu'alors h et k sont nuls. Ce rapport, toutefois, n'est pas indéterminé, car la sécante tend nécessairement vers une limite fixe. Pour obtenir la limite du rapport $\frac{k}{h}$, écrivons l'équation (3) sous la forme suivante :

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l|l|l|l} f'_x(x',y') & h + f''_{x^2}(x',y') & \dfrac{h^2}{1.2} + f'''_{x^3}(x',y') & \dfrac{h^3}{1.2.3} + \ldots \\ f'_y(x',y')\dfrac{k}{h} & + 2f''_{xy}(x',y')\dfrac{k}{h} & + 3f'''_{x^2y}(x',y')\left(\dfrac{k}{h}\right) & + \ldots \\ & + f''_{y^2}(x',y')\left(\dfrac{k}{h}\right)^2 & + 3f'''_{xy^2}(x',y')\left(\dfrac{k}{h}\right)^2 & \\ & & + f'''_{y^3}(x',y')\left(\dfrac{k}{h}\right)^3 & \end{array}\right\} = 0.$$

[*] Nous désignons, suivant l'usage, par f'_x, f''_{x^2}, f'''_{x^3}, etc., les dérivées successives du premier membre de l'équation (1) prises par rapport à x seulement. De même, f'_y, f''_{y^2}, f'''_{y^3}, etc., représentent les dérivées relatives à

En divisant cette dernière équation par h, tous les termes qui contiennent h à une puissance supérieure à la première renfermeront encore cette quantité. Alors, si l'on suppose que h tende vers zéro, les termes qui suivent le premier tendent aussi vers zéro, et l'équation qui détermine la limite cherchée est

$$f'_x(x', y') + f'_y(x', y') \lim. \frac{k}{h} = 0\,;$$

d'où

$$\lim. \frac{k}{h} = -\frac{f'_x(x', y')}{f'_y(x', y')}. \tag{5}$$

L'équation de la tangente, au point (x', y') de la courbe qui a pour équation $f(x, y) = 0$, est donc

$$y - y' = -\frac{f'_x(x', y')}{f'_y(x', y')}(x - x'), \tag{6}$$

ou, ce qui revient au même,

$$f'_y(x', y').(y - y') + f'_x(x', y').(x - x') = 0, \tag{7}$$

avec la condition

$$f(x', y') = 0.$$

La formule (5) fait voir que *le coefficient angulaire de la tangente à une courbe algébrique est le quotient changé de signe des dérivées respectives du premier membre de l'équation proposée, prises par rapport à* x *et par rapport à* y, *et dans lesquelles on a remplacé ces variables par les coordonnées du point de tangence.*

---

la variable y. La notation f''_{xy} indique la dérivée de f'_x prise par rapport à y. En général, les dérivées de l'ordre n, relatives à x et à y, sont représentées respectivement par $f^n_{x^n}$, $f^n_{y^n}$. L'expression $f^{n+p}_{x^n y^p}$ désigne la dérivée de l'ordre p de $f^n_{x^n}$ en y considérant y comme seule variable.

Il suit de là que, si en résolvant l'équation de la courbe proposée par rapport à y, le second membre est une fonction rationnelle et entière de x, le coefficient angulaire de la tangente sera la dérivée de cette fonction, dans laquelle dérivée on aura remplacé x par x'. Ainsi, $f(x)$ étant une fonction rationnelle et entière de x, l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point (x', y') sera

$$y - y' = f'(x').(x - x'),$$

avec la condition

$$y' = f(x').$$

Remarque. — Il se pourrait qu'on eût à la fois

$$f(x', y') = 0, \quad f'_x(x', y') = 0, \quad f'_y(x', y') = 0.$$

Dans ce cas, le premier terme de l'équation (4) disparaît. En divisant par h^2 tous les termes restants, et passant à la limite en faisant $h = 0$, on a, pour déterminer la limite du rapport $\frac{k}{h}$, l'équation du second degré

$$(8) \qquad f''_{x^2}(x', y') + 2f''_{xy}(x', y')\frac{k}{h} + f''_{y^2}(x', y')\left(\frac{k}{h}\right)^2 = 0.$$

Si les racines de cette dernière équation sont réelles et inégales, on en conclura que par le point donné (x', y') on peut mener à la courbe deux tangentes dont les coefficients angulaires sont les racines de l'équation.

Considérons, par exemple, l'équation

$$x^3 - y^2 - 3x + 2y + 1 = 0;$$

on aura

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - 3, \quad f'_y(x, y) = -2y + 2,$$

$$f''_{xy}(x, y) = 0, \quad f''_{x^2}(x, y) = 6x, \quad f''_{y^2}(x, y) = -2.$$

En supposant

$$x' = 1, \quad y' = 1,$$

il vient

$$f(x', y') = 0, \quad f'_x(x', y') = 0, \quad f'_y(x', y') = 0,$$

$$f''_{x^2}(x', y') = 6, \quad f''_{xy}(x', y') = 0, \quad f'_{y^2}(x', y') = -2.$$

Par suite,

$$6 - 2 \cdot \left(\frac{k}{h}\right)^2 = 0,$$

d'où

$$\frac{k}{h} = \pm \sqrt{3}.$$

Il en résulte que, par le point $x' = 1$, $y' = 1$, on peut mener à la courbe deux tangentes, qui ont pour équations

$$y - 1 = \pm (x - 1) \sqrt{3}.$$

Ce qui montre que deux branches de la courbe passent par ce point.

Nous verrons plus loin ce qui arrive lorsque l'équation (8) a ses racines égales, ou imaginaires, ou infinies.

254. On peut encore présenter la méthode des tangentes de la manière suivante :

Soient la courbe MM′ (*fig.* 139) rapportée à deux axes quelconques AX, AY; et M le point de contact, ayant pour coordonnées x', y'. Menons par le point M la sécante quelconque SMM′, traçons les ordonnées MP, M′P′, et conduisons MG parallèle à l'axe des x. Les longueurs M′G, MG, seront les accroissements respectifs k et h de l'ordonnée et de l'abscisse du point M. En désignant par θ l'angle des axes, et par α l'angle M′SX = M′MG, on aura

$$\frac{k}{h} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)}.$$

Si l'on suppose actuellement que la sécante SMM′ tourne autour du point M, de manière que le point M′ se rappro-

chant indéfiniment de M, finisse par coïncider avec lui, la valeur de h converge vers zéro, et le rapport $\frac{k}{h}$ tend vers une limite qui n'est autre chose que le coefficient angulaire de la tangente, MT, à la courbe au point M. Or, en regardant y comme une fonction de x, dans l'équation de la courbe, la limite de $\frac{k}{h}$ est celle du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, c'est-à-dire la dérivée de la fonction. Par conséquent, *le coefficient angulaire de la tangente en un point d'une courbe, est la dérivée de l'ordonnée de ce point, considérée comme fonction de l'abscisse.*

Quand l'équation de la courbe est $y = f(x)$, ou peut être ramenée à cette forme, le coefficient de la tangente est $f'(x')$.

Mais, lorsqu'on a pour équation de la courbe, $f(x, y) = 0$, l'ordonnée étant une fonction *implicite* de l'abscisse, on obtiendra, en désignant par γ le coefficient angulaire de la tangente,

$$f'_x(x', y') + \gamma f'_y(x', y') = 0,$$

d'où

$$\gamma = -\frac{f'_x(x', y')}{f'_y(x', y')}.$$

En effet, si l'équation $f(x, y) = 0$ était résolue par rapport à y, on aurait

$$y = \varphi(x).$$

En mettant cette valeur à la place de y dans $f(x, y)$, on trouverait identiquement

$$f[x, \varphi(x)] = 0.$$

Donc, la dérivée de $f(x, y)$, prise en y considérant y comme une fonction de x, doit être nulle. Or, on démontre en al-

gèbre, qu'en désignant par γ la dérivée de y prise par rapport à x, la dérivée de la fonction composée $f(x, y)$ est

$$f'_x(x, y) + \gamma . f'_y(x, y).$$

Par conséquent, on a

$$f'_x(x', y') + \gamma . f'_y(x', y') = 0.$$

Reprenons l'équation de la tangente

$$f'_y(x', y').(y - y') + f'_x(x', y').(x - x') = 0,$$

qui revient à

$$(1)\ f'_y(x', y').y + f'_x(x', y').x - f'_y(x', y').y' - f'_x(x', y').x' = 0.$$

Sous cette dernière forme, on reconnaît que l'équation de la tangente est, par rapport à x', y', du même degré que l'équation de la courbe.

Mais, en ayant égard à la condition $f(x', y') = 0$, ce degré peut être diminué d'une unité.

En effet, si l'on désigne par

$$Ay^m + \ldots + Bx^n y^p + \ldots + Cx^m,$$

les termes du degré m dans l'équation $f(x, y) = 0$ d'une courbe de l'ordre m, les termes du degré m, par rapport à x', y', dans l'expression

$$-f'_y(x', y').y' - f'_x(x', y')x',$$

seront

$$-mAy'^m \ldots - mBx'^n y'^p \ldots - mCx'^m;$$

car, on a :

$$f'_y(x', y') = mAy'^{m-1} + \ldots + pBx'^n y'^{p-1} + \ldots,$$

$$f_x(x', y') = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + nBx'^{n-1} y'^p + \ldots + mCx'^{m-1}.$$

Par suite, en observant que $p + n = m$:

$$-f'_y(x', y').y' - f'_x(x', y').x'$$
$$= -mAy'^m \ldots - mBx'^n y'^p \ldots - mCx'^m \ldots.$$

Il résulte de là que si l'on ajoute l'équation de la tangente à l'équation de condition $f(x', y') = 0$, multipliée par m; tous les termes du degré m par rapport à x', y', disparaissant, l'équation de cette tangente ne sera plus que du degré $(m - 1)$, relativement à x' et à y'. Cette équation sera

$$(\alpha) \quad f'_y(x', y').(y-y')+f'_x(x', y').(x-x')+mf(x', y')=0.$$

255. Problème I. — *Par un point donné sur le plan d'une courbe, mener une tangente à cette courbe.*

Soient x'', y'', les coordonnées du point donné; x', y', celles du point de contact; et $f(x, y) = 0$, l'équation de la courbe.

L'équation de la tangente au point (x', y') sera

$$(1) \quad f'_y(x', y').(y-y')+f'_x(x', y').(x-x') = 0,$$

avec la condition

$$(2) \quad f(x', y') = 0.$$

La tangente passant par le point donné, on aura

$$(3) \quad f'_y(x', y').(y''-y')+f'_x(x', y').(x''-x') = 0.$$

En résolvant les deux dernières équations, on obtiendra les coordonnées du point de contact. Mais, au lieu de faire ce calcul, il sera préférable de construire le lieu que représente cette dernière équation, quand on y regarde x', y', comme des coordonnées courantes, et de joindre au point donné (x'', y'') les points où ce lieu coupe la courbe proposée.

Lorsque l'équation $f(x, y) = 0$ sera algébrique et du degré m, l'équation (3) sera du même degré, m, par rapport à x', y'. Mais cette dernière pouvant être remplacée par l'équation (α) (n° 254), qui est seulement du degré $(m - 1)$, les points de contact seront déterminés par l'intersection de la courbe donnée et d'une ligne d'un degré inférieur d'une unité. Ce qui montre que le nombre des

tangentes qu'on peut mener par un point à une courbe algébrique du degré m est au plus égal à $m.(m-1)$.

256. PROBLÈME II. — *Mener à une courbe*, $f(x, y)=0$, *une tangente parallèle à une droite donnée*, $y=mx+n$.

Soient x', y', les coordonnées du point de contact; le coefficient angulaire de la tangente sera

$$-\frac{f_x(x', y')}{f_y(x', y')}.$$

La condition du parallélisme donnera

$$(1) \qquad -\frac{f_x(x', y')}{f_y(x', y')}=m.$$

Comme les coordonnées x', y', doivent vérifier l'équation de la courbe proposée, on aura encore

$$(2) \qquad f(x', y')=0.$$

Les valeurs des inconnues x', y', seront déterminées par les équations (1) et (2). Mais, pour résoudre la question géométriquement, on construira le lieu de la première, et par les points où il coupera la courbe proposée, on conduira des parallèles à la droite donnée.

257. PROBLÈME III. — *Mener une tangente commune à deux courbes données.*

Soient $f(x, y)=0$, et $F(x, y)=0$, les équations des deux courbes proposées; (x', y'), (x'', y''), les coordonnées inconnues des points où la droite demandée doit toucher respectivement la première et la seconde.

Les équations de la tangente au point (x', y') seront

$$(1) \qquad y-y'=-\frac{f'_x(x', y')}{f'_y(x', y')}\cdot(x-x'),$$

$$(2) \qquad f(x', y')=0;$$

et celles de la tangente au point (x'', y''),

$$(3) \qquad y - y'' = -\frac{F_x(x'', y'')}{F_y(x'', y'')} \cdot (x - x''),$$

$$(4) \qquad F(x'', y'') = 0.$$

Ces deux tangentes devant coïncider, on aura

$$(5) \qquad \frac{f'_x(x', y')}{f'_y(x', y')} = \frac{F'_x(x'', y'')}{F'_y(x'', y'')},$$

$$(6) \qquad y' + x' \cdot \frac{f'_x(x', y')}{f'_y(x', y')} = y'' + \frac{x'' F'_x(x'', y'')}{F'_y(x'', y'')}.$$

On a, ainsi, les équations (2), (4), (5), (6), pour déterminer les quatre inconnues x', y', x'', y''. De sorte que si l'on éliminait x'', y'', entre les trois dernières, on obtiendrait une équation

$$(7) \qquad \varphi(x', y') = 0,$$

qui, jointe à l'équation (2), donnerait les coordonnées du point où la tangente cherchée touche la première courbe. Il suffira donc de résoudre ces deux équations, ou de construire le lieu de l'équation (7), et de mener des tangentes à la première courbe, aux points où elle sera rencontrée par ce lieu.

258. Problème IV. — *Trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients indéterminés des équations de deux lignes, pour que ces lignes soient tangentes.*

Deux courbes sont dites tangentes, lorsqu'elles ont un point commun, et en ce point une tangente commune. Il résulte de là que, si une courbe qui en rencontre une autre, se meut jusqu'à ce que deux points d'intersection se soient réunis en un seul, ces deux courbes seront tangentes en ce point.

Soient $f(x, y) = 0$, $F(x, y) = 0$, les équations des

courbes proposées, et (x', y'), les coordonnées du point de contact. Les conditions de la question s'exprimeront évidemment, en écrivant que les tangentes aux deux courbes au point (x', y') font le même angle avec l'axe des abscisses, et que les coordonnées de ce point satisfont aux équations de ces courbes. On trouvera ainsi les équations

$$f(x', y') = 0, \quad F(x', y') = 0, \quad \frac{f'_x(x', y')}{f'_y(x', y')} = \frac{F'_x(x', y')}{F'_y(x', y')}.$$

En éliminant x', y', entre elles, l'équation résultante exprimera la condition nécessaire et suffisante pour qu'un même couple de valeurs de x', y', puisse les vérifier toutes trois, et sera, par conséquent, la relation demandée.

259. Une *normale* en un point d'une courbe est, comme on sait, la perpendiculaire à la tangente, menée par ce point. Il résulte de cette définition, que l'équation de la normale à la courbe $f(x, y) = 0$, au point (x', y'), est, en désignant par θ l'angle des coordonnées,

$$(1) \quad y - y' = \frac{f'_x(x', y') \cdot \cos\theta - f'_y(x', y')}{f'_y(x', y')\cos\theta - f'_x(x', y')} \cdot (x - x'),$$

avec la condition

$$(2) \qquad f(x', y') = 0.$$

Lorsque l'angle des coordonnées est droit, l'équation de la normale devient

$$y - y' = \frac{f'_y(x', y')}{f'_x(x', y')}(x - x').$$

On voit facilement comment il faudrait opérer, s'il s'agissait de mener à la courbe une normale par un point extérieur, ou parallèlement à une droite donnée.

Tangente à une courbe rapportée à des coordonnées polaires.

260. La tangente en un point donné M d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires, se détermine au moyen de l'angle qu'elle forme avec le rayon vecteur mené au point de contact.

Comme deux droites font deux angles différents, nous conviendrons de prendre l'angle que fait le rayon vecteur du point de contact avec la partie de la tangente qui serait dirigée au-dessous de l'axe polaire, si le rayon tournait autour du pôle pour se rabattre sur cet axe. Ainsi, au point M (*fig.* 140), l'angle est FMT, et au point M″, FM″T″. Le premier est aigu, le second est obtus.

Cela posé, appelons ω et ρ les coordonnées du point de contact M, et $\omega + h$, $\rho + k$ les coordonnées du point M′, de la courbe, voisin du point M. Tirons MM′, et faisons tourner la sécante M′MS autour du point M, jusqu'à ce qu'elle devienne la tangente MT. La limite commune vers laquelle tendront les angles FM′S, FMS, sera l'angle demandé V. Si du point M on abaisse la perpendiculaire MP sur FM′, le triangle rectangle MM′P donnera

$$\tang \mathrm{FM'S} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{FM'} - \mathrm{FP}},$$

formule qui serait encore vraie, si l'angle FM′S était obtus ; car on aurait alors

$$\tang \mathrm{FM'S} = -\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{M'P}}$$

et

$$\mathrm{M'P} = -(\mathrm{FM'} - \mathrm{FP}).$$

Or,

$$\mathrm{FM'} = \rho + k, \quad \mathrm{FP} = \rho \cos h, \quad \mathrm{MP} = \rho \sin h;$$

donc

$$\operatorname{tang} FM'S = \frac{\rho \sin h}{\rho + k - \rho \cos h} = \frac{2\rho \sin \frac{h}{2} . \cos \frac{h}{2}}{2\rho \sin^2 \frac{h}{2} + k}.$$

Si l'on suppose que le point M' vienne coïncider avec le point M, le premier membre deviendra tang V, et le second prendra la forme $\frac{0}{0}$. Pour en obtenir la véritable valeur, divisons les deux termes par h, nous aurons

$$\frac{\rho . \dfrac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \cos \frac{h}{2}}{\rho . \sin \frac{h}{2} . \dfrac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} + \frac{k}{h}},$$

expression qui, pour $h = 0$, se réduit à

$$\frac{\rho}{\lim \frac{k}{h}};$$

donc, enfin,

$$\operatorname{tang} V = \frac{\rho}{\lim \frac{k}{h}} = \rho . \lim \frac{h}{k}.$$

Quand on emploie les coordonnées polaires, on nomme *sous-tangente* la droite FH, comprise entre le pôle et la tangente, sur la perpendiculaire élevée au rayon vecteur par le pôle. Cette distance s'obtient au moyen du triangle rectangle MFH, qui donne

$$FH = \rho . \operatorname{tang} V = \rho^2 . \lim \frac{h}{k}.$$

En considérant dans la formule

$$\tang V = \rho . \lim \frac{h}{k},$$

ou

$$\tang V = \frac{\rho}{\lim \frac{k}{h}},$$

le rayon vecteur ρ, comme une fonction de l'angle ω, $\frac{k}{h}$ est le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable; par conséquent, $\lim \frac{k}{h}$ est la dérivée du rayon vecteur par rapport à l'angle ω.

Lorsque l'équation polaire aura la forme

$$\rho = f(\omega),$$

la limite de $\frac{k}{h}$ aura pour expression

$$f'_\omega(\omega'), \quad \text{et, par suite,} \quad \tang V = \frac{\rho'}{f'_\omega(\omega')},$$

en nommant ρ', ω', les coordonnées du point de contact.

Si l'équation de la courbe est

$$f(\rho, \omega) = 0,$$

le rayon vecteur ρ étant une fonction implicite de l'angle ω, on obtiendra, en désignant par γ la dérivée de ρ, considérée comme fonction de ω :

$$f'_\omega(\rho, \omega) + \gamma f'_\rho(\rho, \omega) = 0 \quad (\text{n}^\text{o}\ 255);$$

d'où

$$\gamma = -\frac{f'_\omega(\rho, \omega)}{f'_\rho(\rho, \omega)};$$

par suite,

$$\tang V = -\rho' . \frac{f'_\rho(\rho', \omega')}{f'_\omega(\rho', \omega')}.$$

261. On peut trouver facilement l'équation polaire de la tangente.

En effet, si l'on nomme ρ', ω', les coordonnées du point de contact; ρ, ω, les coordonnées courantes de la tangente; p sa distance au pôle; on aura pour l'équation polaire de cette droite (n° **243**)

$$\rho = \frac{p}{\sin(\omega - \alpha)}, \quad \text{et} \quad p = \rho' . \sin V, \quad \sin(\omega' - \alpha) = \frac{p}{\rho'},$$

avec les deux conditions

$$f(\rho', \omega') = 0, \quad \text{tang}\, V = -\rho' . \frac{f'_\rho(\rho', \omega')}{f'_\omega(\rho', \omega')},$$

en représentant par $f(\rho, \omega) = 0$ l'équation de la courbe.

262. Proposons-nous de mener par un point (ρ'', ω''), une tangente à la courbe $f(\rho, \omega) = 0$.

Nommons B le point donné; M le point de contact cherché; F le pôle, et désignons par ρ', ω', les coordonnées de M.

En appliquant au triangle FMB un principe de trigonométrie connu, il viendra

$$\frac{\rho'' + \rho'}{\rho'' - \rho'} = \frac{\text{cotang}\left(\frac{\omega'' - \omega'}{2}\right)}{\text{tang}\left(V + \frac{\omega'' - \omega'}{2}\right)}.$$

En joignant à cette équation les deux suivantes :

$$\text{tang}\, V = -\rho' . \frac{f'_\rho(\rho', \omega')}{f'_\omega(\rho', \omega')}, \quad f(\rho', \omega') = 0,$$

on aura les équations nécessaires pour déterminer les coordonnées du point de contact.

263. S'il s'agit d'une tangente parallèle à une droite donnée; en appelant α l'angle que cette droite fait avec

l'axe polaire, on verra facilement que

$$V = \alpha - \omega',$$

et, par suite, que

$$\operatorname{tang} V = \operatorname{tang}(\alpha - \omega').$$

On aura, pour déterminer les coordonnées ρ', ω', du point de contact, les deux équations :

$$\operatorname{tang}(\alpha - \omega') = -\rho' \cdot \frac{f'_\rho(\rho', \omega')}{f'_\omega(\rho', \omega')}, \quad f(\rho', \omega') = 0,$$

en désignant par $f(\rho, \omega) = 0$ l'équation de la courbe.

264. Appliquons la méthode des tangentes aux courbes du second degré.

Leur équation

$$(1) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

donne

$$f_y(x, y) = 2Ay + Bx + D,$$

$$f_x(x, y) = 2Cx + By + E;$$

par suite, l'équation de la tangente au point (x', y') est

$$(2) \qquad y - y' = -\frac{2Cx' + By' + E}{2Ay' + Bx' + D}(x - x'),$$

ou

$$(y - y')(2Ay' + Bx' + D) + (x - x')(2Cx' + By' + E) = 0,$$

avec la condition

$$(3) \qquad Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Dy' + Ex' + F = 0.$$

L'équation de la tangente se simplifie lorsqu'on y ajoute le double de l'équation de condition; en effectuant le calcul, on obtient

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (2Ay' + Bx' + D)y + (2Cx' + By' + E)x \\ + Dy' + Ex' + 2F = 0, \end{array} \right.$$

équation qui est du premier degré par rapport aux coordonnées y', x', du point de contact.

Pour l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$, on a

$$f'_x(x', y') = 2b^3x', \quad f'_y(x', y') = 2a^2y',$$

et l'équation de la tangente devient

$$y - y' = \frac{-b^2x'}{a^2y'}(x - x').$$

On trouve, de même, que l'équation de la tangente à l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0$$

est

$$y - y' = \frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x').$$

Quant à la parabole $y^2 - 2px = 0$, on a

$$f'_x(x', y') = -2p, \quad f'_y(x', y') = 2y',$$

et, par suite, la tangente au point (x', y') a pour équation

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x').$$

265. Supposons, maintenant, que la tangente doive passer par un point quelconque (x'', y'') donné sur le plan de la courbe

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

En prenant pour inconnues les coordonnées x', y', du point de tangence, on aura

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Dy' + Ex' + F = 0,$$

$$(2Ay' + Bx' + D)y'' + (2Cx' + By' + E)x'' + Dy' + Ex' + 2F = 0.$$

Dans ces deux équations, on peut considérer y', x', comme des coordonnées courantes; alors, la dernière représente

une droite dont l'intersection avec la courbe proposée détermine les points cherchés, c'est-à-dire *la corde des contacts*. En unissant le point donné aux points d'intersection de la droite et de la courbe, on aura les tangentes demandées.

Si l'on place l'origine au point donné (x'', y''), l'équation de la corde des contacts devient, en supprimant les accents,

$$Dy + Ex + 2F = 0.$$

On déterminera cette droite par la construction suivante, qui s'applique aux trois courbes du second degré :

Soient A (*fig.* 141) le point donné, et BCDE la courbe. Menons par le point A deux sécantes quelconques ABC, ADE, et les droites BE, CD; DB, CE, qui se coupent, les deux premières en F, et les deux autres en F'; la droite FF' sera la corde des contacts cherchée.

En effet, prenons pour axes des x et des y, les sécantes ADE, ABC, et posons

$$AD = a, \quad AE = a', \quad AB = b, \quad AC = b';$$

l'équation de la courbe sera

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

et, de plus, on aura

$$a + a' = -\frac{E}{C}, \quad aa' = \frac{F}{C},$$

$$b + b' = -\frac{D}{A}, \quad bb' = \frac{F}{A};$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{a + a'}{aa'} = -\frac{E}{F}, \quad \frac{b + b'}{bb'} = -\frac{D}{F}.$$

D'ailleurs, les équations des droites BE, CD, sont

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a'} = 1, \quad \frac{y}{b'} + \frac{x}{a} = 1.$$

En ajoutant ces équations, il vient :

$$y\left(\frac{b+b'}{bb'}\right)+x\left(\frac{a+a'}{aa'}\right)=2;$$

ou

$$-\frac{Dy}{F}-\frac{Ex}{F}=2,$$

ou bien encore

$$Dy+Ex+2F=0.$$

Cette dernière équation est, comme on sait, l'équation de la corde des contacts des tangentes menées du point A.

Or, les coordonnées du point d'intersection F des droites BE, CD, doivent vérifier toute combinaison des équations de ces droites ; donc elles satisfont à l'équation

$$Dy+Ex+2F=0.$$

Par conséquent, le point F appartient à la corde des contacts cherchée. On verrait de même que le point F' est sur cette corde. C'est ce qu'il fallait démontrer.

266. On a vu (nº 252) que les courbes du second ordre ont pour équation polaire

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\omega}.$$

La dérivée de $\frac{p}{1-e\cos\omega}$ est

$$-\frac{pe\sin\omega}{(1-e\cos\omega)^2}.$$

On aura donc

$$\operatorname{tang}V=-\frac{\rho'(1-e\cos\omega')^2}{pe\sin\omega'};$$

ou, parce que $\rho'=\frac{p}{1-e\cos\omega'}$,

$$\operatorname{tang}V=-\frac{(1-e\cos\omega')}{e\sin\omega'}.$$

Pour la parabole, $e = 1$. Il en résulte :

$$\tang V = -\frac{(1-\cos\omega')}{\sin\omega'} = -\frac{2\sin^2\frac{\omega'}{2}}{2\sin\frac{\omega'}{2}\cdot\cos\frac{\omega'}{2}},$$

ou

$$\tang V = -\tang\frac{\omega'}{2},$$

et, par suite,

$$V = \left(180^\circ - \frac{\omega'}{2}\right).$$

Ce qui montre que la tangente est parallèle à la bissectrice de l'angle que le rayon vecteur mené au point de contact fait avec l'axe polaire. On en peut conclure immédiatement que *la distance du pôle au point où la tangente coupe l'axe polaire est égale au rayon vecteur mené au point de tangence.*

Pour que la tangente soit perpendiculaire au rayon vecteur conduit au point de contact, il faut que $\tang V = \infty$. Ce qui donne

$$e\sin\omega' = 0;$$

par conséquent,

$$\omega' = 0, \quad \text{ou} \quad \omega' = 180^\circ.$$

Il s'ensuit :

$$\rho' = \frac{p}{1-e}, \quad \text{ou} \quad \rho' = \frac{p}{1+e}.$$

Ces valeurs correspondent aux sommets de la courbe.

CHAPITRE DIX-SEPTIÈME.

DES ASYMPTOTES.

§ I. — *Asymptotes d'une courbe rapportée à des coordonnées rectilignes.*

267. L'équation $y = cx + d$ étant celle d'une asymptote non parallèle aux ordonnées, nous avons vu (n° 88) que

$$c = \lim \frac{y}{x}, \quad \text{et} \quad d = \lim (y - cx).$$

Proposons-nous maintenant d'exposer la méthode à suivre pour calculer ces deux quantités c, d, dans les courbes algébriques en général.

Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe de l'ordre m; réunissons les termes du même degré, nous pourrons écrire l'équation sous la forme suivante :

$$(1) \qquad f_0(x, y) + f_1(x, y) + f_2(x, y) + \ldots = 0,$$

f_0, f_1, f_2, etc., désignant les groupes de termes des degrés $m, m-1, m-2$, etc.

En prenant pour inconnue le rapport variable $\frac{y}{x}$ de l'ordonnée à l'abscisse d'un point de la courbe, nous poserons

$$\frac{y}{x} = k, \quad \text{ou} \quad y = kx;$$

l'équation (1) deviendra

$$(2) \qquad f_0(x, kx) + f_1(x, kx) + f_2(x, kx) + \ldots = 0.$$

Les termes de $f_0(x, kx)$ contenant, tous, x à la puissance m; ceux de $f_1(x, kx)$ renfermant cette variable à la puissance $m-1$, et ainsi de suite; les multiplicateurs des puissances m, $m-1$, $m-2$, etc., de x, seront les valeurs que prennent les polynômes $f_0(x, y)$, $f_1(x, y)$, etc., lorsqu'on y remplace x par 1, et y par k.

Si l'on divise l'équation (2) par x^m, elle prendra la forme

$$(3) \qquad f_0(1, k)+f_1(1, k)\frac{1}{x}+f_2(1, k)\frac{1}{x^2}+\ldots=0.$$

La valeur de x tendant vers l'infini, et k convergeant vers une valeur finie c, tous les termes, à partir du second, s'annulent à la limite, et l'on a

$$(4) \qquad f_0(1, c)=0.$$

D'après cela, on voit que *les coefficients angulaires des asymptotes sont les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro l'assemblage des termes du plus haut degré de l'équation de la courbe proposée, dans lesquels on remplace* x *par* 1 *et* y *par* c.

Cherchons actuellement la valeur de d, c'est-à-dire l'ordonnée à l'origine de l'asymptote.

A cet effet, désignons par h la différence variable $y-cx$, dans laquelle y et x représentent les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, et c une racine réelle de l'équation $f_0(1, c)=0$. On aura

$$y-cx=h;$$

d'où

$$\frac{y}{x}=k=c+\frac{h}{x}.$$

Si l'on remplace k par $c+\frac{h}{x}$ dans l'équation (3), il

viendra :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{r|c|r} f_0(1,c)+f_0'(1,c)h & \frac{1}{x}+\frac{1}{2}f_0''(1,c)h^2 & \frac{1}{x^2}+\ldots \\ +f_1(1,c) & +f_1'(1,c)h & +\ldots \\ & +f_2(1,c) & +\ldots \end{array}\right\}=0.$$

En observant que $f_0(1,c)=0$, et en multipliant par x les termes de l'équation (5), on trouve

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{rr|c|c} f_0'(1,c)h+ & \frac{1}{2}f_0''(1,c)h^2 & \frac{1}{x}+\frac{1}{2.3}f_0'''(1,c)h_3 & \frac{1}{x^2} \\ +f_1(1,c)+ & +f_1'(1,c)h & +\frac{1}{2}f_1''(1,c)h^2 & +\ldots \\ & +f_2(1,c) & +f_2(1,c)h & \\ & & +f_3(1,c) & \end{array}\right\}=0.$$

Lorsque x croît indéfiniment, h converge vers une valeur finie d, et à la limite $x=\infty$, l'équation précédente se réduit à

$$f_0'(1,c)\,d+f_1(1,c)=0;$$

d'où

$$(7)\qquad d=-\frac{f_1(1,c)}{f_0'(1,c)}.$$

Ainsi, en désignant par m le degré de l'équation de la courbe, l'*ordonnée à l'origine de l'asymptote est égale et de signe contraire à la partie de degré* (m — 1) *de l'équation de la courbe, divisée par la dérivée relative à* y, *de la partie de degré* m, x *et* y *étant remplacés par* 1 *et* c.

Lorsque c sera une racine simple de l'équation $f_0(1,c)=0$, la dérivée $f'_0(1,c)$ ne pouvant être annulée par cette racine, l'équation (7) donnera pour l'ordonnée à l'origine d une valeur finie, correspondante à celle de c.

Si c est une racine multiple de $f_0(1,c)=0$, on aura

$$f_0'(1,c)=0,$$

et, en admettant que $f_1(1,c)$ ne soit pas annulé par la

même valeur de c, il en résultera $d=\infty$; et, par conséquent, il n'y aura aucune asymptote, sous l'inclinaison déterminée par cette valeur de c.

Quand la racine multiple de $f_0(1,c)=0$ annule $f_1(1,c)$, le terme de l'équation (6), indépendant de x, disparaît, et en multipliant par x les termes qui restent, et passant à la limite en faisant $x=\infty$, cette équation donne

$$\frac{1}{2}f''_0(1,c)d^2+f'_1(1,c)d+f_2(1,c)=0.$$

Dans ce cas, on pourra trouver pour d deux valeurs correspondantes à celles de c, et c'est effectivement ce qui doit arriver lorsqu'il existe réellement deux asymptotes parallèles, dont le coefficient angulaire est égal à c.

Que, si la même valeur de c annule encore $f''_0(1,c)$, $f'_1(1,c)$, $f_2(1,c)$, ce qui exige que c soit au moins une racine triple de l'équation $f_0(1,c)=0$, il faudra, pour déterminer les valeurs correspondantes de d, avoir recours à l'équation

$$\frac{1}{2.3}f'''_0(1,c)d^3+\frac{1}{2}f''_1(1,c)d^2+f'_2(1,c)d+f_3(1,c)=0.$$

C'est ce qui aurait lieu si la courbe avait trois asymptotes parallèles, dont le coefficient angulaire serait cette racine de l'équation $f_0(1,c)=0$.

On opérerait de même pour déterminer les valeurs de d, correspondantes à quatre asymptotes parallèles, et ainsi de suite.

Il résulte de ce que nous venons de dire que *le nombre des asymptotes non parallèles à l'axe des* y, *ne peut surpasser le plus grand des exposants de* y, *dans l'équation de la courbe proposée.*

En effet, le nombre des asymptotes dont il s'agit, est au plus

égal au degré de l'équation $f_0(1, c) = 0$, et le degré de cette équation ne peut être supérieur au plus grand des exposants de y dans l'équation de la courbe.

268. Pour déterminer les asymptotes parallèles à l'axe des y, on observe que, si $x = \alpha$ est l'équation de l'une de ces droites, il faudra qu'en faisant converger x vers α, à partir d'une valeur $(\alpha \pm h)$, suffisamment rapprochée de α, l'ordonnée de la courbe augmente indéfiniment et devienne plus grande que toute quantité donnée. A la limite $(x = \alpha)$, y devient infinie. On trouvera donc α, en cherchant les valeurs finies de x qui correspondent à des valeurs réelles infinies de y dans l'équation proposée.

D'après cela, on ordonne l'équation de la courbe suivant les puissances décroissantes de y; elle prend la forme

$$(1) \qquad \mathrm{A}y^n + \mathrm{B}y^p + \mathrm{C}y^r + \ldots = 0,$$

A, B, C, etc., représentant généralement des fonctions de x.

En divisant par y^n, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{y^{n-p}} + \frac{\mathrm{C}}{y^{n-r}} + \ldots = 0,$$

et il est clair que toute valeur finie de x correspondante à $y = \infty$, doit annuler A.

Donc, *pour déterminer les asymptotes parallèles à l'axe des* y, *il faut résoudre l'équation que l'on forme en égalant à zéro le coefficient de la plus haute puissance de* y, *dans l'équation de la courbe proposée.*

Il s'ensuit que *le nombre des asymptotes parallèles à l'axe des* y *ne peut surpasser le degré de* x *dans le coefficient du terme qui renferme* y *à la plus haute puissance.*

De sorte qu'en désignant par m le degré de la courbe, et par n le plus grand exposant de y, le nombre des asymptotes parallèles à l'axe des y est au plus $m - n$.

On sait, d'ailleurs, que le nombre des asymptotes non parallèles à l'axe des y n'est pas supérieur à n.

Donc, *une courbe du degré* m *ne peut avoir plus de* m *asymptotes rectilignes.*

Nous devons faire observer que l'on peut obtenir pour c et d des valeurs réelles et finies, sans que la droite $y = cx + d$, déterminée par ces valeurs, soit *réellement* une asymptote.

Il résulte du raisonnement qui a été fait, que si la courbe a des asymptotes, on les obtiendra par la méthode exposée; mais, cela ne prouve pas que les valeurs de c et de d obtenues par cette méthode donnent, dans tous les cas, une asymptote de la courbe.

Il en est de même des droites parallèles à l'axe des y, déterminées par l'équation $A = 0$ (nº 267). Il est possible qu'elles ne soient pas réellement asymptotes à la courbe représentée par

$$(1) \qquad Ay^n + By^p + Cy^r + \ldots = 0.$$

Si l'on désigne par α une racine réelle de $A = 0$, il faudra, pour que la droite $x = \alpha$ soit asymptote à la courbe, qu'en faisant converger x vers α, à partir d'une certaine valeur $\alpha + h$, ou $\alpha - h$, les valeurs correspondantes de y dans l'équation de la courbe restent constamment réelles. En d'autres termes, il faut que la courbe ait une branche infinie déterminée par les valeurs de x convergentes vers α.

Considérons, par exemple, la courbe représentée par l'équation

$$x^2y^2 - 2yx^2 + 2x^2 - 1 = 0.$$

En appliquant la méthode des asymptotes non parallèles à l'axe des y, on trouve

$$c = 0 \quad \text{et} \quad d = 1.$$

Ce qui donne la droite $y = 1$, parallèle à l'axe des x.

Or, l'équation

$$x^2y^2 - 2yx^2 + 2x^2 - 1 = 0$$

revient à

$$(y-1)^2x^2 + x^2 - 1 = 0.$$

Sous cette forme, on reconnaît immédiatement qu'elle représente une courbe limitée dans le sens des x, de chaque côté de l'axe des y, à une distance de cet axe, égale à l'unité, et qui, par cela même, ne peut avoir d'asymptote parallèle à l'axe des x.

269. *Une asymptote peut être considérée comme la limite des positions que prend une sécante, dont deux points d'intersection avec la courbe s'éloignent à l'infini.*

En effet, si l'on regarde dans l'équation (5) du n° 266, c et h comme des quantités données, les racines de cette équation seront les abscisses des points de rencontre de la droite $y = cx + h$, avec la courbe $f(x, y) = 0$. Pour que deux de ces points s'éloignent à l'infini, il faut que l'équation (5) ait deux racines infinies, ce qui exige, comme on le démontre en algèbre, que les coefficients $f_0(1, c)$, $f'_0(1, c)h + f_1(1, c)$, des deux premiers termes, soient nuls. Les valeurs de c et h fournies par les équations

$$f_0(1, c) = 0, \quad f'_0(1, c)h + f_1(1, c) = 0$$

sont celles qui rendent la sécante $y = cx + h$, asymptote à la courbe.

On peut, de même, *considérer une asymptote comme la limite des positions que prend une tangente dont le point de contact s'éloigne à l'infini.*

Car il est permis de supposer que les deux points d'intersection se réduisent à un seul, avant de s'éloigner à l'infini.

On voit facilement qu'*une courbe algébrique du degré* m *ne peut être coupée par une asymptote en plus de* (m — 2) *points.*

En effet, le nombre des racines finies de l'équation (5) ne peut surpasser $(m - 2)$, puisque deux de ses racines deviennent infinies.

§ II. — *Asymptotes d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires.*

270. La détermination des asymptotes aux courbes rapportées à des coordonnées polaires, résulte de la définition même de ces lignes. Représentons, en effet, par ω' une valeur de ω pour laquelle le rayon vecteur ρ devient infini; en prenant sur la courbe un point quelconque M (*fig.* 142), et en abaissant de ce point une perpendiculaire, $MP = z$, sur le rayon vecteur OD, on aura

$$z = \rho \sin(\omega' - \omega);$$

ω étant l'angle quelconque MOX.

La limite vers laquelle tendra z, lorsque l'angle ω convergera vers ω', sera la distance de l'asymptote à la direction du rayon vecteur infini. Lorsque cette limite est *zéro*, on en conclut que la droite qui fait l'angle ω' avec l'axe polaire est asymptote. Mais, si l'on trouve

$$\lim \rho \,.\, \sin(\omega' - \omega) = \pm h,$$

l'asymptote sera une parallèle à cette droite, située au-dessus ou au-dessous d'elle à la distance h. Enfin, si z n'a pas de *limite*, il n'existe pas d'asymptote qui fasse l'angle ω' avec l'axe polaire.

Pour déterminer la limite de $\rho \sin(\omega' - \omega)$, on observera que

$$\rho \,.\, \sin(\omega' - \omega) = \frac{\sin(\omega' - \omega)}{\left(\frac{1}{\rho}\right)}.$$

Quand $\omega = \omega'$, les deux termes de la fraction $\dfrac{\sin(\omega' - \omega)}{\left(\frac{1}{\rho}\right)}$.

se réduisent à zéro, et la vraie valeur de cette fraction s'obtient, comme on sait, en remplaçant ω par ω' dans les dérivées de ses deux termes. Or, la dérivée de $\sin(\omega' - \omega)$ est $-\cos(\omega' - \omega)$, qui devient -1, lorsque $\omega = \omega'$. Par conséquent, pour déterminer la limite cherchée, on divisera -1 par la valeur que prend la dérivée de la fonction de ω que $\frac{1}{\rho}$ représente, en ayant soin de remplacer ω par ω' dans cette dérivée.

Considérons, par exemple, l'hyperbole dont l'équation polaire est

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega};$$

on aura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 - e\cos\omega}{p},$$

et, par suite, la dérivée de $\frac{1}{\rho}$ est

$$\frac{e.\sin\omega}{p}.$$

En divisant -1 par cette dernière expression, il vient:

$$\frac{-p}{e\sin\omega} = \frac{-b^2}{b} = -b.$$

On en peut conclure que les distances des foyers d'une hyperbole aux asymptotes sont égales à la moitié du second axe de la courbe.

CHAPITRE DIX-HUITIÈME.

DU CENTRE, DES DIAMÈTRES ET DES AXES.

§ I. — *Du centre.*

271. Nous avons dit qu'*on nomme centre d'une courbe un point tel, que toute sécante passant par ce point, a ses points de rencontre avec la courbe à égale distance, deux à deux, du point dont il s'agit.*

Il résulte de cette définition que *si l'origine des coordonnées est placée au centre d'une courbe quelconque, l'équation de cette courbe ne doit pas changer en y remplaçant* x *et* y *par* — x *et* — y. En effet, considérons une sécante menée arbitrairement par le centre O (*fig.* 143), elle coupera la courbe en des points qui seront, deux à deux, équidistants de O. Soient M, M′, deux de ces points; en traçant les ordonnées MP, M′P′, de ces points, nous formerons deux triangles MOP, M′OP′, qui seront égaux comme ayant le côté OM égal au côté OM′, et les angles MOP, OMP, respectivement égaux aux angles M′OP′, OM′P′; donc, MP = M′P′, OP = OP′; par conséquent, les coordonnées du point M′ sont égales et de signes contraires à celles du point M. D'où il résulte, que s'il y a sur la courbe un point M dont les coordonnées soient x', y', il existe nécessairement sur cette courbe un second point M′ dont les coordonnées sont $-x'$, $-y'$. On conclut de là, que l'équation de la courbe ne doit pas changer en y remplaçant x et y par $-x$, $-y$.

Réciproquement, si l'équation d'une courbe n'est pas

altérée lorsqu'on y change x et y en $-x$, $-y$, la courbe a un centre, et ce centre est l'origine des coordonnées.

En effet, les coordonnées d'un point M quelconque de la courbe étant, par exemple, x', y', ces coordonnées prises en signe contraire appartiennent à un autre point M' de la courbe. En menant les droites OM, OM'; les triangles OMP, OM'P', seront égaux, comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux, à savoir : $P = P'$, $OP = OP'$, $PM = P'M'$. Donc, les angles MOP, M'OP', seront égaux; par suite, OM et OM' sont en ligne droite; en outre, $OM = OM'$; donc, l'origine O est un centre.

Ainsi, *pour que l'origine des coordonnées soit le centre d'une courbe algébrique ou transcendante, il faut et il suffit que l'équation de cette courbe ne soit pas altérée, lorsqu'on y remplace* x *et* y *par* $-$ x *et* $-$ y.

272. Lorsque la courbe proposée est algébrique, la condition que nous venons d'énoncer revient à celle-ci : *pour que l'origine des coordonnées soit le centre d'une courbe algébrique, il faut et il suffit que tous les termes de l'équation soient de même parité, c'est-à-dire tous de degré pair, ou tous de degré impair.*

On voit, en effet, qu'en remplaçant x et y par $-x$ et $-y$, dans le premier cas, les termes conservent leurs signes; et que dans le second, ils en changent tous à la fois.

Il est clair que, dans ce dernier cas, il ne doit pas exister de terme indépendant des variables.

273. Il résulte de ce qui précède, que *le centre d'une courbe algébrique de degré impair est situé sur la courbe*, puisqu'en y transportant l'origine, l'équation de la courbe n'ayant plus de terme indépendant des variables, cette équation sera vérifiée par les coordonnées du centre $x = 0$, $y = 0$.

Le centre d'une courbe de degré pair peut être situé, ou non situé, sur la courbe.

274. Il convient de faire observer que *lorsqu'une courbe a plus d'un centre, elle en a nécessairement une infinité.*

Soient, en effet, O, O′ (*fig.* 144), deux centres d'une même courbe, et M un quelconque de ses points. Si l'on mène la droite MO, et qu'on la prolonge de l'autre côté du centre O, d'une longueur OM′ égale à OM, le point M′ appartiendra à la courbe. On aura deux autres points N, N′, de cette courbe, en joignant M et M′ au centre O′, et en prenant sur les prolongements des droites MO′, M′O′, les distances O′N, O′N′, respectivement égales à O′M, O′M′. Le quadrilatère MM′NN′ sera un parallélogramme, puisque les diagonales MO′N, M′O′N′, se coupent mutuellement en deux parties égales; d'ailleurs, le point O est le milieu de MM′, donc la droite OO′ est parallèle aux côtés MN′, M′N, et passe par le milieu O″ de NN′, et de plus O′O″ = OO′. Le point O″ divisant en deux parties égales la droite *quelconque* NN′ comprise dans la courbe, sera encore un centre de la courbe. Semblablement, les deux centres O′, O″, en détermineraient un nouveau O‴, et ainsi de suite indéfiniment. On peut d'ailleurs opérer à gauche comme à droite du point O. Les distances OO′ et O′O″ étant égales, il en est de même de celles qui sont comprises entre les centres consécutifs. Donc, enfin, quand une courbe a plus d'un centre, elle en a une infinité situés sur une droite, et également distants entre eux (*).

De plus, toute parallèle à la droite des centres menée

(*) On verra de même que si une courbe a trois centres O, O′, O″ (*fig.* 145), non situés en ligne droite, elle admet pour centre le quatrième sommet O‴ du parallélogramme construit sur les droites OO′, O′O″. Car, soit M un point quelconque de la courbe; construisons le quadrilatère MM′M″M‴, dont les trois côtés MM′, M′M″, M″M‴, aient respectivement leurs milieux aux points O, O′, O″. Les quatre sommets de ce quadrilatère

par un point M de la courbe, la coupe en une infinité de points; car les prolongements des droites qui unissent M′ aux différents centres O′, O″, O‴, etc., rencontrent évidemment la courbe en des points N′, N″, N‴, etc., situés sur une parallèle menée par M à la droite OO′O″....

De là on conclura qu'une *courbe algébrique ne peut avoir qu'un seul centre*, puisqu'une droite ne peut rencontrer cette courbe en un nombre de points supérieur au degré de son équation.

Nous allons démontrer actuellement, par la forme même d'une équation algébrique, que s'il existe deux points O, O′, tels qu'en les prenant pour origine, l'équation ne change pas lorsqu'on y remplace x et y par $-x$, $-y$, cette équation ne peut représenter qu'un système de droites parallèles à la droite OO′.

Car, en plaçant l'origine au point O, et prenant pour axe des x la droite OO′, l'équation devra être indépendante de x. Supposons, en effet, qu'elle puisse contenir cette variable, et désignons l'équation par

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point O′, il viendra, en nommant d la distance OO′,

$$f(x + d, y) = 0,$$

ou

$$f(x, y) + f'_x(x, y)d + \ldots = 0. \tag{2}$$

Le terme de $f'_x(x, y)$ qui renferme la plus haute puissance de x ne pourra être détruit par aucun autre, parce

---

appartiendront à la courbe, et le côté M‴M aura, comme on sait, son milieu au point O‴; donc ce dernier point est un centre. Il s'ensuit que la courbe admettra pour centres toutes les intersections de deux systèmes de parallèles aux droites OO′, O′O″, et ayant entre elles les mêmes distances que les côtés opposés du parallélogramme OO′O″O‴.

qu'il est par rapport à x d'un degré supérieur à ceux des dérivées suivantes, et qu'il n'est semblable à aucun des termes de $f(x, y)$ qui sont tous de même parité. Il en résulte que si x entrait dans la première équation, tous les termes de la seconde ne seraient pas de même parité; donc l'équation (1) ne contiendra que y, et, par conséquent, elle représentera un système de droites parallèles à l'axe des x.

275. Il suit de la théorie précédente, que pour trouver le centre d'une courbe algébrique donnée par son équation, il faut, après s'être assuré qu'il n'est pas à l'origine même, transporter l'origine en un point quelconque du plan, et voir si l'on peut déterminer les cordonnées de ce point de manière qu'il ne reste dans l'équation aucun terme de degré impair si la courbe est de degré pair, ou aucun terme de degré pair si la courbe est de degré impair. On obtiendra ainsi un certain nombre d'équations où il n'y aura d'inconnues que les coordonnées de la nouvelle origine.

Nous allons faire voir que parmi ces équations il en existera deux qui ne seront que du premier degré. En effet, soient m le degré de l'équation; a, b, les coordonnées du centre. D'après ce que nous venons de dire, a et b doivent avoir des valeurs telles, qu'en transportant l'origine au point dont a et b sont les coordonnées, la nouvelle équation ne renferme plus de termes de parité différente de m. On substituera donc $x+a$, $y+b$ à x et y dans l'équation proposée, et on égalera à zéro les coefficients des termes de degrés $(m-1)$, $(m-3)$, $(m-5)$, etc.; ce qui formera autant d'équations entre a et b qu'il y a de termes à faire disparaître.

Parmi ces équations, il s'en trouvera au moins deux qui ne seront que du premier degré. Pour le prouver, soit Ax^py^q un terme du degré m; la substitution de $x+a$ et $y+b$ à x et y donnera le terme $pAax^{p-1}y^q$ du degré

$(m-1)$; on aura, en outre, deux autres termes en $x^{p-1}y^q$, à savoir : le terme provenant du terme en $x^{p-1}y^{q+1}$, et qui sera de la forme $(q+1)A'bx^{p-1}y^q$, et le terme provenant du terme en $x^{p-1}y^q$, qui est de la forme $Bx^{p-1}y^q$; de sorte qu'on aura l'équation

$$(1) \qquad pAa + (q+1)A'.b + B = 0.$$

On trouvera, de même, le terme $qAbx^py^{q-1}$; un terme $(p+1)A''ax^py^{q-1}$ donné par le terme $A''x^{p+1}y^{q-1}$, et enfin $B'x^py^{q-1}$ appartenant déjà à l'équation proposée; on aura donc

$$(2) \qquad qAb + (p+1)A''a + B' = 0.$$

En résolvant les équations du premier degré (1) et (2), on obtiendra les valeurs de a et b, et en remplaçant ces quantités a, b, par leurs valeurs, dans les coefficients de tous les autres termes qui doivent disparaître, il faudra, si la courbe a un centre, que tous ces coefficients se réduisent à zéro. Dans ce cas, a et b seront les coordonnées du centre, et ce point sera déterminé par l'intersection de deux droites que les équations (1) et (2) représentent.

En appliquant cette méthode aux courbes du second degré, les premiers membres des équations (1) et (2) deviennent les dérivées relatives à x et y du premier membre de l'équation de la courbe, dans lesquelles x et y sont remplacées par a et b respectivement.

§ II. — *Des diamètres.*

276. On nomme *diamètre* d'une courbe, le lieu géométrique des milieux d'un système de cordes parallèles, menées sous une direction quelconque donnée.

Proposons-nous de trouver l'équation générale des diamètres d'une courbe déterminée par son équation.

Soient $f(x, y) = 0$, l'équation de la courbe, que nous

supposerons rationnelle, entière, et du degré m; AB, A'B', etc. (*fig.* 146), un système de cordes parallèles dont le coefficient angulaire est δ; x', y', les coordonnées du milieu O' de l'une de ces cordes; transportons l'origine au point O', l'équation de la courbe rapportée aux nouveaux axes sera

$$(1) \qquad f(x+x',\ y+y')=0;$$

et celle de la corde AB,

$$(2) \qquad y=\delta x.$$

Puisque la nouvelle origine est le milieu de AB, il faudra qu'en éliminant y entre les équations (1) et (2), l'équation résultante

$$(3) \qquad f(x+x',\ \delta x+y')=0$$

ait deux racines égales et de signes contraires.

Cette condition s'exprimera par une équation entre ses coefficients; et cette dernière ne contenant d'autres variables que x', y', sera l'équation du lieu géométrique des milieux de toutes les cordes placées sous la direction donnée, c'est-à-dire l'équation générale des lignes diamétrales.

Supposons, par exemple, que l'équation $f(x,y)=0$ de la courbe proposée soit du troisième degré; si l'on remplace x et y par $x+x'$, et $\delta x+y'$, il viendra, en adoptant la notation des dérivées, expliquée (page 365) :

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{r|r|r|c} f(x',y')+f'_x & x+f''_{x^2} & \dfrac{x^2}{1.2}+f'''_{x^3} & \dfrac{x^3}{1.2.3} \\ +\delta f'_y & +2\delta f''_{xy} & +3\delta f'''_{x^2y} & \\ & +\delta^2 f''_{y^2} & +3\delta^2 f'''_{xy^2} & \\ & & +\delta^3 f'''_{y^3} & \end{array}\right\}=0.$$

ou

$$(5) \qquad ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

en posant

$$\frac{f'''_{x^3} + 3\,\delta f'''_{x^2y} + 3\,\delta^2 f'''_{xy^2} + \delta^3 f'''_{y^3}}{1.2.3} = a,$$

$$\frac{f''_{x^2} + 2\,\delta f''_{xy} + \delta^2 f''_{y^2}}{1.2} = b,$$

$$f'_x + \delta f'_y = c,$$

$$f(x', y') = d.$$

Pour que l'équation (5) ait deux racines égales et de signes contraires, il faut, et il suffit qu'elle admette pour racine $-\frac{b}{a}$; c'est-à-dire que

$$-\frac{b^3}{a^2} + \frac{b^3}{a^2} - \frac{bc}{a} + d = 0,$$

d'où

$$bc = ad.$$

Par suite, on aura :

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} &[f'''_{x^3} + 3\,\delta f'''_{x^2y} + 3\,\delta^2 f'''_{xy^2} + \delta^3 f'''_{y^3}].f(x', y') \\ &-3\,[f''_{x^2} + 2\,\delta f''_{xy} + \delta^2 f''_{y^2}].[f'_x + \delta f'_y] \end{aligned}\right\} = 0,$$

pour l'équation générale des diamètres des courbes du troisième degré.

Il est facile de reconnaître que l'équation (α) est aussi du troisième degré; car le multiplicateur de $f(x', y')$ est indépendant des variables x', y', et les facteurs

$$f''_{x^2} + 2\,\delta f''_{xy} + \delta^2 f''_{y^2}, \quad f'_x + \delta f'_y,$$

sont l'un du premier degré, et l'autre du second.

Lorsque les cordes sont parallèles à l'axe des x, le coefficient $\delta = 0$, et l'équation (α) devient

$$f'''_{x^3}.f(x', y') - 3 f''_{x^2}.f'_x = 0.$$

Si les cordes sont parallèles à l'axe des y, $\delta = \infty$, et l'on

trouve

$$f''''_{y^4}.f(x',y') - 3f''_{y^2}.f'_y = 0.$$

Le calcul conduit généralement à une équation du degré $\frac{m(m-1)}{1.2}$, comme il est facile de le prévoir; car une courbe du degré m peut être, en général, coupée par une droite en m points, et en prenant les milieux des intervalles déterminés par ces m points d'intersection considérés deux à deux, on aura sur la sécante rectiligne $\frac{m(m-1)}{1.2}$ points qui appartiendront au diamètre relatif aux cordes parallèles à cette sécante. Ainsi, le diamètre peut être coupé en $\frac{m(m-1)}{1.2}$ points, par une droite.

277. Appliquons cette méthode aux courbes du second degré dont l'équation est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Si l'on remplace x et y, par $x + x'$, $y + y'$, les termes du second degré ne changent pas, et ceux du premier degré, x, y, ont pour coefficients les dérivées relatives à x et y, du premier membre, dans lesquelles x et y sont remplacées par x' et y' (nº 95). Donc, en désignant ces dérivées par f'_x, f'_y, et substituant δx à y, l'équation résultante aura pour terme du premier degré

$$(f'_x + f'_y . \delta)\, x.$$

Pour que cette équation ait ses deux racines égales et de signes contraires, il faut et il suffit que le coefficient de la première puissance de x soit nul; par conséquent, l'équation des diamètres est

$$(1) \qquad f'_x + f'_y . \delta = 0,$$

ou

$$(2Ay + Bx + D)\,\delta + By + 2Cx + E = 0.$$

D'après cela, on voit que les diamètres des courbes du second degré sont des lignes *droites*.

L'équation (1) donne

$$\delta = -\frac{f'_x}{f'_y},$$

et comme cette valeur de δ est précisément le coefficient angulaire de la tangente à la courbe au point où cette courbe est rencontrée par le diamètre, on en conclut que :

Dans les trois courbes du second degré, la tangente à l'extrémité d'un diamètre est parallèle aux cordes que ce diamètre divise en parties égales (*).

L'équation (1) est satisfaite, quel que soit δ, par les valeurs de x et de y, qu'on déduit des équations

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0.$$

Or, ces dernières déterminent le centre de la courbe ; donc, *dans l'ellipse et l'hyperbole, tous les diamètres passent par le centre* (**).

Tous les diamètres de la parabole sont parallèles ; car, lorsqu'il s'agit de cette courbe, les valeurs de x et de y, données par les équations

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0,$$

sont infinies.

Ce parallélisme peut être établi de cette autre manière.

(*) Les tangentes menées à une courbe quelconque, aux points où elle est coupée par un de ses diamètres, sont *généralement* parallèles aux cordes que ce diamètre divise en parties égales. Car, en faisant abstraction de certains *points singuliers* dont nous parlerons plus loin, on peut considérer la tangente comme la limite des positions que prend une corde parallèle à cette tangente, lorsque deux des points d'intersection de la corde avec la courbe se réduisent au point de contact.

(**) En général, lorsqu'une courbe a un centre, tous les diamètres de la courbe passent par ce point, et cela résulte simplement des définitions du centre et des diamètres.

L'équation

$$(2Ay + Bx + D)\delta + By + 2Cx + E = 0$$

donne pour le coefficient angulaire des diamètres, l'expression

$$-\frac{B\delta + 2C}{2A\delta + B}.$$

En effectuant la division indiquée, et observant que $B^2 = 4AC$, on trouve la quantité constante $-\frac{B}{2A}$.

278. Désignons par δ' le coefficient angulaire des diamètres d'une ellipse, ou d'une hyperbole; il viendra

$$\delta' = -\frac{B\delta + 2C}{2A\delta + B},$$

ou

$$(1) \qquad 2A\delta\delta' + B(\delta + \delta') - 2C = 0.$$

Cette dernière équation étant symétrique par rapport à δ et δ', on peut considérer δ' comme représentant la direction des cordes, alors δ indiquera celle du diamètre; ou inversement. Il s'ensuit que δ et δ' sont les coefficients d'inclinaison de deux diamètres tels, que chacun d'eux divise en parties égales les cordes parallèles à l'autre. Par conséquent, l'équation (1) exprime la relation générale qui existe entre deux diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole.

Lorsque $B = 0$, l'équation (1) donne

$$\delta\delta' = \frac{C}{A};$$

c'est-à-dire que le produit des coefficients angulaires de deux diamètres conjugués est constant. Si A et C sont nuls, il vient

$$\delta + \delta' = 0;$$

c'est le cas où les axes des coordonnées sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole.

279. Pour déterminer les axes d'une ellipse ou d'une hyperbole, rapportée à des coordonnées rectangulaires, on remplacera dans l'équation (1) (nº 278), δ' par $-\frac{1}{\delta}$, ce qui donne

$$\delta^2 - 2\left(\frac{A+C}{B}\right)\delta - 1 = 0.$$

Les racines de cette dernière équation sont les tangentes des angles que les axes de la courbe font avec l'axe des x; on voit que leur produit est égal à -1; d'où il faut conclure que les deux axes de la courbe sont rectangulaires.

Quant à la parabole, le coefficient angulaire de son axe est $-\frac{B}{2A}$; donc, celui des cordes correspondantes a pour valeur $\frac{2A}{B}$, et, par conséquent, l'équation de l'axe de cette *courbe* est

$$f'_x + f'_y \times \frac{2A}{B} = 0, \quad \text{ou} \quad Bf'_x + 2Af'_y = 0,$$

lorsque les coordonnées forment un angle droit.

280. Nous avons remarqué (nº 276) qu'en désignant par m le degré d'une courbe algébrique, l'équation *générale* de ses diamètres est du degré $\frac{m(m-1)}{2}$. Lorsque m surpasse 3, on a

$$\frac{m(m-1)}{2} > m;$$

l'équation des diamètres est alors d'un degré supérieur à celui de la courbe; et si $m = 3$, il en résulte

$$\frac{m(m-1)}{1.2} = 3 = m.$$

D'après cela, on conçoit que lorsqu'il s'agit d'une courbe algébrique d'un ordre plus élevé que le second, la détermination de ses lignes diamétrales ne peut, en général, servir à simplifier sa construction, ni à faciliter la recherche de ses propriétés. Toutefois, dans des cas particuliers, il se peut qu'en disposant de la direction des cordes, l'équation du diamètre qui leur correspond s'abaisse au premier degré. Pour en donner un exemple, considérons la courbe dont l'équation est

$$y^3 - 3xy + x^3 = 0.$$

Pour cette courbe, l'équation (α) du n° 276 devient

$$\left\{\begin{array}{l} (y^3 - 3xy + x^3)(\delta^3 + 1) \\ -9(\delta^2 y + x - \delta)[x^2 - y + \delta(y^2 - x)] \end{array}\right\} = 0.$$

Si l'on pose $\delta = -1$, on aura

$$\delta^3 + 1 = 0,$$

et, par suite,

$$(y + x + 1)(x^2 - y - y^2 + x) = 0,$$

ou

$$(y + x + 1)^2 . (x - y) = 0;$$

il en résulte

$$y = x, \quad \text{et} \quad y = -x - 1.$$

La droite $y = x$ est effectivement le diamètre correspondant aux cordes placées sous la direction $\delta = -1$. Quant à la droite $y = -x - 1$, parallèle à ces cordes, elle est asymptote à la courbe considérée.

281. Lorsqu'une courbe a un diamètre rectiligne, en dirigeant suivant ce diamètre l'un des deux axes de coordonnées, par exemple celui des x, et prenant pour axe des y une parallèle aux cordes correspondantes au diamètre, l'équation de la courbe devra être telle, que si on y remplace y par $-y$, elle admette les mêmes solutions. En effet, il est clair que si cette équation est vérifiée par les valeurs α, β, de x, y, elle le sera de même, lorsqu'on sub-

stituera α, -6 à x, y. Réciproquement, si l'équation d'une courbe ne change pas, quand la variable y est remplacée par $-y$, l'axe des x sera un diamètre rectiligne correspondant aux cordes parallèles à l'axe des y.

Par conséquent, si la courbe est algébrique, on obtiendra ses diamètres rectilignes en déterminant les systèmes d'axes de coordonnées pour lesquels l'équation de cette courbe ne renferme que des puissances paires de l'ordonnée.

Désignons par $f(x,y)=0$ l'équation primitive de la courbe considérée, que nous supposons rapportée à des axes rectangulaires. Les formules qu'on devra employer sont

$$x = a + x'\cos\alpha + y'\cos\alpha',$$
$$y = b + x'\sin\alpha + y'\sin\alpha'.$$

Mais, dans la question qui nous occupe, on peut supposer que la nouvelle origine soit le point où se coupent les axes des x' et des x, ce qui donne

$$b = 0.$$

On remplacera donc x et y par les expressions

$$a + x\cos\alpha + y\cos\alpha' \quad \text{et} \quad x\sin\alpha + y\sin\alpha',$$

dans $f(x,y)$, et on égalera à zéro les coefficients des termes contenant y à des puissances impaires; ce qui donnera autant d'équations entre les trois inconnues α, α', a. Si ce système admet une solution, elle déterminera un diamètre rectiligne et la direction des cordes qui lui correspondent.

Appliquons cette méthode à l'équation

$$y^3 - 3xy + x^3 = 0,$$

que nous avons déjà considérée.

En remplaçant y et x par

$$x\sin\alpha + y\sin\alpha' \quad \text{et} \quad a + x\cos\alpha + y\cos\alpha',$$

les termes qui renfermeront y à des puissances impaires se-

ront

$$\begin{array}{r|c|r|r|l}
\sin^3\alpha' & y^3 + 3\sin^2\alpha.\sin\alpha' & x^2 y + 6a.\cos\alpha.\cos\alpha' & xy + 3a^2\cos\alpha' & y \\
+\cos^3\alpha' & +3\cos^2\alpha.\cos\alpha' & -3\ .\ \cos\alpha.\sin\alpha' & -3a\sin\alpha' & \\
 & & -3\ .\ \sin\alpha.\cos\alpha' & &
\end{array}$$

On aura donc

(1) $$\sin^3\alpha' + \cos^3\alpha' = 0,$$

(2) $$\sin^2\alpha.\sin\alpha' + \cos^2\alpha\cos\alpha' = 0,$$

(3) $$2a\cos\alpha\cos\alpha' - \cos\alpha\sin\alpha' - \sin\alpha\cos\alpha' = 0,$$

(4) $$a^2\cos\alpha' - a\sin\alpha' = 0.$$

L'équation (1) donne immédiatement

$$\text{tang}^3\alpha' = -1, \quad \text{d'où} \quad \text{tang}\,\alpha' = -1.$$

En divisant respectivement par $\cos^2\alpha\cos\alpha'$, $\cos\alpha\cos\alpha'$, les termes des équations (2) et (3), il vient :

(5) $$\text{tang}^2\alpha.\text{tang}\,\alpha' + 1 = 0,$$

(6) $$2a - \text{tang}\,\alpha' - \text{tang}\,\alpha = 0.$$

De (5) on déduit

$$\text{tang}^2\alpha = -\frac{1}{\text{tang}\,\alpha'} = 1,$$

et, par suite,

$$\text{tang}\,\alpha = \pm 1.$$

Il faut prendre $\text{tang}\,\alpha = +1$, puisque α ne peut être égal à α'. L'équation (6) devient alors

$$2a + 1 - 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad a = 0.$$

Enfin l'équation (4) est vérifiée par $a = 0$.

On trouve donc un diamètre rectiligne qui est la bissectrice de l'angle des axes des coordonnées primitives; et les cordes correspondantes sont parallèles à la bissectrice de l'angle adjacent.

282. Lorsqu'une courbe du second ordre est coupée par

des droites parallèles à une direction déterminée, le lieu géométrique du centre des moyennes distances des points où chaque sécante rencontre la courbe est une ligne droite, car ce lieu est évidemment un diamètre. La même proposition existe pour une courbe algébrique d'un degré quelconque; c'est-à-dire que :

Si l'on coupe une courbe algébrique d'un degré quelconque, m, *par une suite de sécantes parallèles à une direction déterminée, le lieu géométrique du centre des moyennes distances des points où chaque sécante rencontre la courbe est généralement une ligne droite.*

En effet, soient $f(x, y) = 0$, l'équation de la courbe; et $y = cx + d$, celle de l'une des sécantes considérées; les racines de l'équation $f(x, cx + d) = 0$, seront les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite. Si m représente le degré de la courbe, l'équation

$$f(x, cx + d) = 0$$

deviendra, en adoptant la notation indiquée n° 266,

$$f_0(1, c)\, x^m + [f'_0(1, c)\, d + f_1(1, c)]\, x^{m-1} + \ldots = 0.$$

Donc, en nommant x, y, les coordonnées du centre des moyennes distances des points d'intersection de la sécante et de la courbe, on aura

$$x = -\frac{f'_0(1, c)\, d + f_1(1, c)}{m . f_0(1, c)}, \quad \text{et} \quad y = cx + d;$$

d'où

$$x = -\frac{f'_0(1, c) . (y - cx) + f_1(1, c)}{m . f_0(1, c)}.$$

Cette dernière équation étant du premier degré par rapport aux coordonnées x, y, représente une ligne droite.

§ III. — *Des axes.*

283. On appelle *axe* d'une courbe toute droite qui divise la courbe en deux parties parfaitement égales et symétriques. De cette définition il résulte qu'un axe est un diamètre rectiligne perpendiculaire aux cordes qui lui correspondent. Par conséquent, la méthode exposée (nº 281) pour déterminer les diamètres rectilignes d'une courbe, s'applique à la détermination des axes, en ayant, toutefois, égard à ce que l'angle des cordes et du diamètre doit être droit, lorsque le diamètre devient un axe.

Ainsi, en supposant que

$$f(x, y) = 0$$

soit l'équation de la courbe, rapportée à des coordonnées rectangulaires, on remplacera x et y par les formules

$$a + x\cos\alpha - y.\sin\alpha \quad \text{et} \quad x.\sin\alpha + y.\cos\alpha$$

dans l'équation

$$f(x, y) = 0;$$

puis, on égalera à zéro les coefficients des termes qui contiendront y à des puissances impaires. Les valeurs réelles de a et de α qui vérifient les équations ainsi obtenues, déterminent par cela même un axe de la courbe. Il y aura donc autant d'axes que de systèmes de valeurs réelles de a et α satisfaisant aux équations dont il s'agit.

284. Lorsque l'équation d'une courbe $f(x, y) = 0$ est symétrique par rapport aux coordonnées x, y, la bissectrice de l'angle des axes de coordonnées est nécessairement un axe de la courbe, quel que soit, d'ailleurs, l'angle des coordonnées.

Car, si les nombres α, β, sont les valeurs de x, y, pour un point de la courbe $f(x, y) = 0$, il y aura un autre

point appartenant de même à la courbe, et dont les coordonnées seront

$$x=6, \quad y=\alpha,$$

puisque l'équation

$$f(x, y)=0$$

est supposée symétrique par rapport à x et y. Il est clair que ces deux points sont sur une perpendiculaire à la bissectrice de l'angle des axes de coordonnées, et à la même distance de cette droite. On voit donc qu'à chaque point de la courbe, situé d'un côté de la bissectrice, correspond un second point qui se trouve de l'autre côté de cette droite, et symétrique du premier; par conséquent, la bissectrice est un axe de la courbe.

285. *Lorsqu'une courbe a deux axes* AA′, BB′ (fig. 147) *qui se coupent sous un angle* AOB, *différent d'un angle droit, elle a nécessairement un troisième axe* CC′ *passant par le point d'intersection des deux premiers, et qui forme avec l'un d'eux,* BB′, *un angle égal à celui des deux premiers axes.*

En effet, la droite BB′, divisant la courbe en deux parties parfaitement égales et symétriques, s'il existe d'un côté de cette droite un axe OA de la courbe, il faudra qu'il y ait de l'autre côté de la droite BB′ un axe OC, symétrique de OA par rapport à BB′.

En menant par le point O la droite DOD′ de manière que l'angle DOC égale COB, on pourra déterminer un quatrième axe, et ainsi de suite.

286. *Quand une courbe a deux axes parallèles, elle a nécessairement une infinité d'autres axes parallèles aux deux premiers, et équidistants entre eux.*

Car, supposons que les deux parallèles AB, A′B′ (*fig.* 148), soient des axes d'une courbe. La droite A′B′ divisant la courbe en deux parties égales et symétriques, il ne peut

existter d'un côté de cette droite un axe AB, sans que de l'autre côté il y ait aussi un axe A″B″, symétrique de AB par rapport à A′B′. La même observation s'appliquant à A″B″, on trouvera un quatrième axe A‴B‴, symétrique de A′B′ par rapport à A″B″, et ainsi de suite. Par conséquent, la courbe aura une infinité d'axes parallèles et équidistants.

Si d'un point quelconque M de la courbe on mène une perpendiculaire commune à tous les axes parallèles, elle rencontrera la courbe en une infinité de points symétriquement situés deux à deux par rapport à chacun des axes; d'où il faut conclure qu'*une courbe dont l'équation est algébrique ne peut avoir deux axes parallèles,* car on sait qu'une ligne courbe algébrique ne peut être coupée par une droite en un nombre de points plus grand que le degré de son équation.

Les courbes représentées par des équations transcendantes peuvent avoir une infinité d'axes parallèles entre eux; telle est, par exemple, la *sinusoïde* $y = \sin x$, qui admet pour axes toutes les droites que l'équation $x = \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi$ représente, lorsqu'on remplace n par un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

On reconnaîtra facilement que toutes ces droites ont la propriété dont il s'agit, en prenant l'une d'elles pour axe des y; car l'équation de la courbe devenant alors

$$y = \sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi + x,$$

reste la même lorsqu'on change le signe de l'abscisse.

CHAPITRE DIX-NEUVIÈME.

FORME DES COURBES.

§ I. — *Concavité et convexité.*

287. On dit qu'une courbe CAB (*fig.* 149) est, en un de ses points A, *concave* par rapport à une droite OX, lorsqu'en prenant sur la courbe, à partir de ce point, et de chaque côté, des arcs AB, AC, qui peuvent être aussi petits qu'on voudra, l'arc total BAC est compris dans l'intérieur de l'angle aigu ATX, que la tangente TA, à la courbe au point A, forme avec la droite donnée OX.

Une courbe est, au contraire, *convexe* en un de ses points A (*fig.* 150), par rapport à une droite OX, lorsque l'arc CAB limité à des points C, B, aussi rapprochés qu'on voudra du point A, de chaque côté de ce point, est entièrement compris dans l'intérieur de l'angle obtus ATX′ formé par la droite OX et la tangente à la courbe au point considéré.

288. Dans la recherche des conditions analytiques correspondantes à ces deux cas, nous prendrons pour axe des x la droite donnée, pour axe des y une perpendiculaire à cette droite, et nous supposerons, en premier lieu, que l'ordonnée du point A considéré sur la courbe, est positive.

Si la courbe est, en un de ses points A, concave vers l'axe des x (*fig.* 149), les tangentes menées aux points B, C, voisins de A, formeront avec la partie positive OX de l'axe des x, des angles BT′X, CT″X qui devront être : le premier, moindre que ATX, et le second, plus grand; cela résulte de la définition même de la concavité. Par con-

séquent, si l'abscisse OA′ augmente d'une quantité h=A′B′, suffisamment petite, la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente à la courbe forme avec l'axe des x, ira en diminuant. Si, au contraire, l'abscisse diminue, la tangente de l'angle augmentera. Or, les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires, la tangente de l'angle ATX est précisément la première dérivée de l'ordonnée considérée comme fonction de l'abscisse : d'où il suit que la première dérivée de l'ordonnée décroît quand l'abscisse augmente; donc sa dérivée *seconde* doit être négative.

Quand l'ordonnée du point A est négative, l'arc CAB est situé au-dessous de l'axe des x: en faisant croître l'abscisse, l'angle que la tangente à la courbe forme avec l'axe des x, au-dessous de cet axe, diminue; par suite, l'adjacent de cet angle, dont l'ouverture est dirigée au-dessus du même axe augmente : donc, la *dérivée seconde de l'ordonnée est positive.*

On reconnaîtra, de même, que si la courbe proposée CAB (*fig.* 150) tourne sa convexité vers l'axe des x, la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente à cette courbe fait avec l'axe des x, du côté des y positifs, est croissante quand l'abscisse augmente, et que si l'arc considéré est situé au-dessous de l'axe des abscisses, le contraire a lieu.

De là, on peut conclure qu'en général, lorsque les axes de coordonnées sont rectangulaires, *une courbe est, en un de ses points, concave ou convexe par rapport à l'axe des abscisses suivant que l'ordonnée de ce point et sa dérivée seconde ont des signes contraires ou le même signe* (*).

(*) La formule de *Taylor* conduit facilement à cette conclusion. En effet, quand la courbe tourne sa concavité en un point A (*fig.* 149) vers l'axe des x, les ordonnées des points voisins B, C, sont moindres, en valeur absolue, que celles des points F, G, qui leur correspondent sur la tangente AT, lorsque l'abscisse x' de A augmente ou diminue d'une quantité h suffisam-

Il est essentiel de faire observer que ce principe ne serait pas toujours vrai si les axes de coordonnées faisaient entre eux un angle quelconque différent d'un angle droit. Par exemple, dans la *fig.* 151, la courbe CAB est au point A concave par rapport à l'axe des x, et l'on voit que l'angle de la tangente AT avec cet axe, augmente lorsque l'abscisse OA′ du point de tangence croît de la quantité A′C′. Alors l'ordonnée AA′ et sa dérivée seconde ont le même signe, car elles sont, l'une et l'autre, positives.

Considérons encore l'hyperbole DSD′ (*fig.* 152), rapportée à ses asymptotes OX, OY; et supposons, pour fixer les idées, que l'angle XOY soit de 45 degrés. En prenant pour unité les coordonnées égales du sommet S, l'équation de la courbe sera

$$yx = 1,$$

et la dérivée seconde de l'ordonnée d'un point quelconque sera exprimée par $\frac{2}{x^3}$; il est clair que cette dérivée aura toujours le même signe que l'ordonnée dont la valeur est $\frac{1}{x}$, elle sera, par conséquent, positive pour tous les points de la branche DSD′. Or, si l'on mène à la courbe la tangente GK, perpendiculaire à l'axe des x, le point de contact G

---

ment petite. Or, si l'on nomme y' l'ordonnée de A; y, Y celles des points B, F, ou C, G; $f'(x')$, $f''(x')$, etc., les dérivées de y' considérée comme fonction de x', on a

$$y = y' + hf'(x') + \frac{h^2}{1.2}f''(x') + \ldots,$$
$$Y = y' + hf'(x');$$

d'où

$$Y - y = -\frac{h^2}{1.2}f''(x') \pm \ldots.$$

La quantité h étant très-petite, le signe de $Y - y$ est différent de celui de $f''(x')$; d'ailleurs $Y - y$ et y ont le même signe ou des signes contraires, suivant que la courbe est concave ou convexe vers l'axe des x; on en conclut le principe énoncé.

limitera d'un côté un arc GD qui s'étend, de l'autre côté, jusqu'à l'infini, dans le sens de l'asymptote OY, en tournant continuellement sa concavité vers l'axe des x, OX. L'ordonnée GG' du point G est égale à $\sqrt[4]{2}$; donc, la courbe est concave vers l'axe des x, en tous les points dont l'ordonnée positive est plus grande que $\sqrt[4]{2}$, et la dérivée seconde de chacune de ces ordonnées est constamment positive.

§ II. — *De l'ordonnée maximum ou minimum.*

289. L'ordonnée d'un point A, d'une courbe quelconque, est maximum lorsqu'elle est plus grande que celles de deux points B, C, pris sur la même courbe de différents côtés de A, et à une distance de ce dernier point aussi petite qu'on voudra.

L'ordonnée de A est minimum quand elle est moindre que celles des points voisins B, C.

En considérant l'ordonnée y comme une fonction $f(x)$ de l'abscisse x, qui est alors la variable indépendante, on sait que, pour des valeurs croissantes de x, l'ordonnée croît ou décroît suivant que sa première dérivée $f'(x)$ est positive ou négative. D'ailleurs, cette dérivée est le coefficient angulaire de la tangente à la courbe; donc *la valeur de l'ordonnée augmente ou diminue suivant que le coefficient angulaire de la tangente à la courbe est positif ou négatif.* De là, on conclut immédiatement cet autre principe :

Lorsque, pour des valeurs croissantes de l'abscisse, la dérivée de l'ordonnée, ou le coefficient angulaire de la tangente change de signe, en passant du positif au négatif, l'ordonnée passe par une valeur maximum; si la dérivée change de signe, en devenant positive, l'ordonnée passe par une valeur minimum.

Dans le cas où la première dérivée $f'(x)$ de l'ordonnée

ne peut devenir infinie, elle ne change de signe qu'en passant par zéro; donc, pour déterminer le maximum ou le minimum de l'ordonnée, il faudra résoudre l'équation

$$f'(x) = 0,$$

et examiner si pour des valeurs $(c + h)$, $(c - h)$, la première un peu plus grande, l'autre un peu plus petite que la racine obtenue c, la dérivée a changé de signe. Le tracé de la courbe, aux environs du point dont l'abscisse c est racine de l'équation

$$f'(x) = 0,$$

pourra servir à reconnaître si l'ordonnée correspondante à cette abscisse est un maximum ou un minimum. Il est, d'ailleurs, nécessaire, pour que la dérivée $f'(x)$ change de signe en passant par zéro, que, parmi les dérivées suivantes $f''(x)$, $f'''(x)$, etc., la première qui ne s'annule pas en même temps que $f'(x)$, soit une dérivée d'ordre pair. C'est ce qui résulte de la formule de Taylor.

Lorsque la première dérivée de $f'(x)$ peut prendre une valeur infinie réelle, pour des valeurs finies de l'abscisse, il faut résoudre successivement chacune des équations

$$f'(x) = 0, \quad f'(x) = \infty,$$

afin d'obtenir tous les points qui peuvent répondre à la question proposée; et examiner, comme nous venons de l'expliquer, si la dérivée a changé de signe en passant par zéro ou par l'infini.

Quand l'abscisse d'un point dont l'ordonnée est maximum ou minimum, annule la première dérivée, la tangente en ce point est parallèle à l'axe des x; elle serait parallèle à l'axe des y, si l'abscisse du point dont il s'agit, faisait prendre une valeur infinie à la dérivée de l'ordonnée.

§ III. — *Des points singuliers.*

290. Les points *singuliers* d'une courbe sont ceux où la courbe offre quelque particularité remarquable et indépendante du système de coordonnées auquel on la rapporte. On distingue plusieurs espèces de points singuliers; nous allons en donner la définition, et indiquer à quels caractères analytiques on peut les reconnaître.

291. *Points d'inflexion.* — On nomme ainsi les points où la concavité d'une courbe se change en convexité. Lorsque les axes des coordonnées sont rectangulaires, on sait que la courbe est concave ou convexe par rapport à l'axe des x, suivant que l'ordonnée et sa dérivée seconde ont des signes différents ou le même signe; il en résulte évidemment que si l'on passe par un point d'inflexion, la dérivée seconde de l'ordonnée doit changer de signe.

Lorsque la seconde dérivée $f''(x)$ de l'ordonnée considérée comme fonction de l'abscisse, ne peut devenir infinie, elle ne change de signe qu'en passant par zéro; pour déterminer alors les points d'inflexion, il faudra résoudre l'équation

$$f''(x) = 0,$$

et il restera encore à examiner si la dérivée seconde a changé de signe en s'annulant. Pour que cette condition soit remplie, il faudra que parmi les dérivées suivantes $f'''(x)$, $f^{\text{iv}}(x)$, etc., la première qui ne se réduit pas à zéro, en même temps que $f''(x)$, soit une dérivée d'ordre impair.

Si la dérivée seconde peut devenir infinie, pour des valeurs finies de x, on devra résoudre successivement chacune des équations

$$f''(x) = 0, \quad f''(x) = \infty,$$

puis s'assurer que le premier membre $f''(x)$ change de

signe lorsqu'on donne à x deux valeurs, l'une un peu plus grande, l'autre un peu plus petite que la racine obtenue.

292. *Points multiples.* — On donne ce nom aux points où passent plusieurs branches d'une même courbe; la recherche des points multiples se fonde sur ce que, en ces points, il est possible de mener plus d'une tangente à la courbe considérée. On les détermine par une règle dont l'application n'offre, en théorie, aucune difficulté quand l'équation de la courbe est algébrique et rationnelle.

En effet, soient x', y', les coordonnées d'un point multiple, et α le coefficient angulaire de l'une des tangentes menées par ce point; en désignant par $f(x, y) = 0$ l'équation de la courbe, on aura

$$(1) \qquad \alpha . f'_y(x', y') + f'_x(x', y') = 0,$$

et

$$(2) \qquad f(x', y') = 0.$$

Les dérivées $f'_y(x', y')$, $f'_x(x', y')$ de la fonction algébrique et entière $f(x, y)$ n'admettant l'une et l'autre qu'une seule valeur, il faudra, pour que α puisse avoir plusieurs valeurs différentes, qu'on ait

$$(3) \qquad f'_y(x', y') = 0, \quad f'_x(x', y') = 0.$$

Par conséquent, les coordonnées d'un point multiple de la courbe $f(x, y) = 0$ devront vérifier à la fois les trois équations

$$f(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0, \quad f'_x(x, y) = 0.$$

Si ce dernier système admet une solution réelle x', y', pour obtenir les valeurs correspondantes de α, on aura recours à l'équation

$$(4) \quad \alpha^2 f''_{y^2}(x', y') + 2\alpha . f''_{xy}(x', y') + f''_{x^2}(x', y') = 0 \text{ (p. 367, R.)};$$

et lorsque les racines de cette équation seront réelles, on en conclura que deux branches de la courbe passent par le point (x', y').

Les deux branches seraient tangentes si les deux racines de l'équation (4) étaient égales entre elles.

Si trois branches de la courbe passaient au point (x', y'), les coefficients $f''_{y^2}(x', y')$, $f''_{xy}(x', y')$, $f''_{x^2}(x', y')$, de l'équation (4), seraient nuls, et, dans ce cas, les valeurs de α devraient être données par l'équation

$$\alpha^3 f'''_{y^3}(x', y') + 3\alpha^2 f'''_{xy^2}(x', y') + 3\alpha f'''_{x^2y}(x', y') \\ + f'''_{x^3}(x', y') = 0 \quad (\text{n}^\circ\ 283,\ \text{page } 365);$$

et ainsi de suite.

293. *Points de rebroussement.* — Un point tel que A (*fig.* 153), où s'arrêtent deux branches de courbes AD, AF, en ayant en ce point une tangente commune AG, est un *point de rebroussement*; on dit que le rebroussement est de *première* ou de *seconde espèce*, suivant que les deux branches de la courbe sont situées de différents côtés de la tangente ou du même côté.

En désignant par x', y', les coordonnées du point de rebroussement A, le coefficient angulaire α de la tangente AG sera déterminé par l'équation

$$\alpha^2 f''_{y^2}(x', y') + 2\alpha f''_{xy}(x', y') + f''_{x^2}(x', y') = 0,$$

qui aura ses deux racines égales entre elles.

Il faudra, en outre, qu'en faisant croître l'abscisse x', ou OP', deux des valeurs de y qui étaient des quantités réelles PN, PM, lorsque x avait une valeur OP, moindre que x', deviennent, l'une et l'autre, imaginaires.

Lorsque le coefficient α est infini, la tangente AG est parallèle à l'axe des y, et, dans ce cas, il faut, pour que les deux branches de la courbe s'arrêtent au point A, qu'en

faisant varier y au delà de y', deux des valeurs réelles de x deviennent imaginaires.

Afin de savoir si le point de rebroussement A est de première ou de seconde espèce, on observera que, dans le premier cas, en donnant à l'abscisse x une valeur

$$\text{OP} = \text{OP}' - \text{PP}' = x' - h,$$

très-peu différente de x', les points N, M, correspondants sur les deux branches de la courbe, doivent être situés de différents côtés de la tangente AG; de sorte que les différences obtenues en retranchant de ces ordonnées NP, MP, l'ordonnée IP de la tangente, auront des signes contraires. Or, on sait que pour une valeur suffisamment petite de h, ces différences ont le même signe que la dérivée seconde de l'ordonnée de A (page 413); donc, les dérivées secondes de l'ordonnée y' du point A considéré successivement comme appartenant à chacune des deux branches, devront avoir des signes contraires.

On reconnaîtra de même que si A est un point de rebroussement de seconde espèce, la dérivée seconde de l'ordonnée de ce point a des valeurs de même signe pour les deux branches de la courbe.

294. *Points conjugués.* — On nomme point *conjugué* ou *isolé* un point dont les coordonnées vérifient l'équation d'une courbe, sans qu'aucune branche de la courbe passe par ce point.

Si x', y', représentent les coordonnées d'un point isolé; $f(x, y) = 0$ l'équation de la courbe; h une quantité très-petite : on aura d'abord

$$f(x', y') = 0,$$

et les valeurs de y correspondantes à $x = x' \pm h$, seront imaginaires, puisqu'il n'existe aucun point de la courbe voisin du point conjugué.

L'accroissement k de l'ordonnée y', correspondant à h,

étant imaginaire, il en sera de même du rapport $\frac{k}{h}$, et par suite de la limite de ce rapport, qui est la première dérivée de l'ordonnée considérée comme fonction de l'abscisse.

Il en résulte que le coefficient angulaire de la tangente à la courbe au point isolé (x', y') doit être imaginaire. Par conséquent, les coordonnées x', y', doivent annuler les dérivées premières $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ de l'équation proposée, et rendre imaginaires les racines de l'équation du second degré

$$\alpha^2 f''_{y^2}(x', y') + 2\alpha f''_{xy}(x', y') + f''_{x^2}(x', y') = 0,$$

à laquelle on a recours pour trouver le coefficient angulaire de la tangente, lorsque les coordonnées du point de contact annulent à la fois les deux dérivées relatives à y et x.

295. *Point d'arrêt* — Cette dénomination désigne un point où une seule branche de courbe vient brusquement s'arrêter.

Si x', y', représentent les coordonnées d'un point d'arrêt d'une courbe $f(x, y) = 0$, et h une quantité aussi petite qu'on voudra, il faudra qu'en remplaçant successivement x par $x' - h$, et $x' + h$, dans $f(x, y) = 0$, une des valeurs réelles de y devienne imaginaire; ou inversement, qu'une valeur imaginaire de y devienne réelle. Il sera, de plus, nécessaire que y n'ait qu'une seule valeur réelle peu différente de y', et correspondante à $x' - h$, ou $x' + h$, puisqu'une seule branche de courbe doit s'arrêter au point dont il s'agit.

296. *Points anguleux ou saillants.* — C'est le nom qu'on donne aux points où s'arrêtent deux branches de courbe, sans avoir en ces points une tangente commune.

Par conséquent, un point anguleux ne se distingue d'un point de rebroussement (n° 293), qu'en ce que les deux

branches de courbe qu'il termine, ont, à cette extrémité commune, des tangentes différentes; d'où il suit que les coefficients angulaires de ces tangentes doivent être donnés par une équation du second degré dont les racines sont inégales.

Nous allons maintenant montrer quelques applications de ce qui précède.

§ IV. — *De la construction des courbes.*

297. Le moyen général de construire une courbe dont l'équation est connue, consiste, comme on sait, à donner à l'une des deux coordonnées, à x par exemple, des valeurs arbitraires suffisamment rapprochées les unes des autres, et à déterminer par approximation, ou exactement, les valeurs correspondantes de l'autre coordonnée y; on obtient ainsi un certain nombre de points par lesquels on fait passer un trait continu, lorsqu'on a toutefois reconnu que ces points doivent appartenir à une même branche de la courbe.

Ce procédé revient évidemment à couper la courbe par des droites parallèles à l'un des axes de coordonnées; il y a, parfois, avantage à prendre pour sécantes des droites qui passent par l'origine, lorsque l'origine est un point de la courbe à construire. Enfin, il se peut que l'équation polaire de la courbe soit plus simple que celle qui s'exprime en coordonnées rectilignes.

Dans tous les cas, pour avoir une idée précise de la forme que peut avoir la ligne dont on connaît l'équation, il convient de construire les tangentes aux différents points obtenus, et d'examiner de quelle manière varie le coefficient angulaire de la tangente lorsqu'on fait croître l'abscisse. C'est par l'examen des valeurs que peut prendre ce coefficient angulaire que l'on découvre les points singuliers de la courbe.

Prenons, d'abord, pour exemples quelques courbes algébriques.

298. *Folium de* DESCARTES. — La courbe qu'on nomme ainsi, est représentée par l'équation

$$(1) \qquad y^3 - 3axy + x^3 = 0,$$

dans laquelle le paramètre a est un nombre quelconque réel que nous supposerons positif.

On pourrait, en donnant à x une valeur quelconque, calculer les valeurs correspondantes de y, par la résolution d'une équation du troisième degré, mais il est plus simple de déterminer les points de la courbe par ses intersections avec les droites $y = mx$, qui passent par l'origine.

Des équations (1) et $y = mx$, on tire immédiatement

$$(2) \qquad x = \frac{3am}{(m^3 + 1)},$$

$$(3) \qquad y = \frac{3am^2}{(m^3 + 1)}.$$

En donnant à m différentes valeurs, on aura les coordonnées d'autant de points de la courbe qu'on voudra.

Le coefficient angulaire est $\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$. En désignant par α ce coefficient, et substituant à x, y, les valeurs que donnent les équations (2), (3), il vient

$$(4) \qquad \alpha = \frac{m^4 - 2m}{2m^3 - 1} = \frac{m}{2}\left(\frac{m^3 - 2}{m^3 - \frac{1}{2}}\right).$$

Lorsque $m = 0$, il en résulte à la fois

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \alpha = 0.$$

Donc, l'axe des x est tangent à la courbe à l'origine des coordonnées.

Si l'on fait croître m depuis o jusqu'à $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, la valeur de α est constamment positive et croissante. Car le facteur $\frac{m^3-2}{m^3-\frac{1}{2}}$ revient à $1+\frac{3}{1-2m^3}$. A la limite $m=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, on a

$$\alpha=\infty,\quad x=2a\sqrt[3]{\frac{1}{2}},\quad y=2a\sqrt[3]{\frac{1}{4}},$$

ou

$$x=a\sqrt[3]{4},\quad y=a\sqrt[3]{2}.$$

De là concluons qu'en faisant augmenter m depuis zéro jusqu'à $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, on obtient un arc de courbe OA (*fig.* 154) qui part de l'origine en touchant l'axe des x à ce point, et qui tourne constamment sa convexité vers l'axe des x, jusqu'au point A dont les coordonnées sont

$$x=a\sqrt[3]{4},\quad y=a\sqrt[3]{2}.$$

A ce dernier point la tangente est parallèle à l'axe des y, la valeur de l'abscisse est un *maximum*.

Si l'on continue à donner à m des valeurs croissantes depuis $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ jusqu'à $\sqrt[3]{2}$, le coefficient angulaire de la tangente, α, deviendra évidemment négatif, et, de plus, sa valeur absolue $\frac{2m-m^4}{2m^3-1}$ ira en diminuant. En effet, le dénominateur $2m^3-1$ augmente avec m, et le numérateur $2m-m^4$ diminue, puisque la dérivée $2-4m^3$ de ce numérateur est négative pour des valeurs de m plus grandes que $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. On voit de même que l'abscisse x va en diminuant, et que l'ordonnée y est au contraire croissante, car les dérivées

des fonctions $\frac{3am}{m^3+1}$, $\frac{3am^2}{m^3+1}$ sont

$$\frac{3a(1-2m^3)}{(m^3+1)^2},\quad \frac{3am(2-m^3)}{(m^3+1)^2};$$

la première est négative, et l'autre positive, quand m varie depuis $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ jusqu'à $\sqrt[3]{2}$. Lorsque $m=\sqrt[3]{2}$, on a

$$\alpha=0,\quad x=a\sqrt[3]{2},\quad y=a\sqrt[3]{4}.$$

Par conséquent, les valeurs de m comprises entre $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt[3]{2}$ donnent l'arc AC concave vers l'axe des x. Au point C, dont les coordonnées sont

$$x=a\sqrt[3]{2},\quad y=a\sqrt[3]{4},$$

la tangente est parallèle à l'axe des x, la valeur de l'ordonnée est un *maximum*.

La variable m augmentant de $\sqrt[3]{2}$ à ∞, le coefficient angulaire $\alpha=\frac{m}{2}\left(\frac{m^3-2}{m^3-\frac{1}{2}}\right)$ redevient positif et croît de 0 à ∞. Car le facteur $\frac{m}{2}$ augmente jusqu'à l'infini, et l'autre facteur $\frac{m^3-2}{m^3-\frac{1}{2}}$, qu'on peut mettre sous la forme

$$1-\frac{3}{2m^3-1},$$

est convergent vers l'unité en restant positif. Les valeurs correspondantes de x et de y vont en diminuant, puisque les dérivées $\frac{3a(1-2m^3)}{(m+1)^3}$, $\frac{3am(2-m^3)}{(m+1)^3}$ des fonctions $\frac{3am}{m^3+1}$, $\frac{3am^2}{m^3+1}$ deviennent négatives. A la limite $m=\infty$, on a

$$\alpha=\infty,\quad x=0,\quad y=0$$

On trouve donc l'arc CO concave par rapport à l'axe des x, et qui touche l'axe des y à l'origine.

Lorsque m est négatif et moindre que l'unité, en valeur absolue, l'abscisse x est négative, et l'ordonnée y positive; les valeurs de m déterminent alors une branche indéfinie OD, située dans l'angle YOX′, et qui tourne sa convexité vers la droite OX′, comme il est facile de le reconnaître.

Si la variable m restant négative est, en valeur absolue, plus grande que l'unité, l'abscisse sera positive et l'ordonnée négative; dans ce cas, on obtient la branche indéfinie OD′, située dans l'angle Y′OX, et concave par rapport à l'axe des abscisses.

Ces deux branches ont pour asymptote la droite GG′ dont l'équation est

$$y = -x - a.$$

Il faut, de plus, observer que l'équation

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0$$

étant symétrique par rapport à y et x, la bissectrice OB de l'angle YOX des coordonnées est un axe de la courbe. La tangente menée au point B, où la courbe est rencontrée par l'axe OB, forme avec OB un angle droit; ce point est, par conséquent, *un sommet*. Ses coordonnées ont pour valeur commune $\frac{3a}{2}$.

On voit d'ailleurs que l'origine est un point multiple.

En prenant pour axe des x l'axe même de la courbe, et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite, l'équation de la courbe ne devra plus contenir de puissances impaires de y. On trouve effectivement qu'elle devient, en conservant la même origine,

$$3\left(x\sqrt{2} + a\right)y^2 + x^3\sqrt{2} - 3ax^2 = 0.$$

L'équation de l'asymptote est alors

$$x = -\frac{a}{\sqrt{2}},$$

et l'abscisse du sommet

$$+\frac{3a}{\sqrt{2}}.$$

299. *Cissoïde de* Dioclès. — Pour second exemple, je prends l'équation

$$(2a - x)y^2 - x^3 = 0,$$

qui représente la courbe nommée *cissoïde*.

L'équation résolue donne

$$y = \pm x\sqrt{\frac{x}{2a - x}},$$

et, sous cette forme, elle montre clairement que la courbe se compose de deux branches égales, symétriques par rapport à l'axe des x, et qui ont pour asymptote la droite $x = 2a$. Il n'est pas moins évident que ces deux branches sont entièrement comprises entre l'asymptote TAT′ (*fig.* 155), dont l'équation est $x = 2a$, et l'axe des y.

Toute droite $y = mx$, menée par l'origine O, coupe la courbe en un second point P, dont les coordonnées sont

$$x = 2a.\frac{m^2}{m^2 + 1}, \quad y = 2a.\frac{m^3}{m^2 + 1}.$$

En remplaçant x, y, par ces valeurs, le coefficient angulaire de la tangente qui a pour expression $\frac{y^2 + 3x^2}{2y(2a - x)}$ se réduit à $m^3 + 3m$. Si l'on fait croître m positivement depuis o jusqu'à l'infini, le coefficient angulaire $m^3 + 3m$, d'abord nul, est ensuite constamment positif et croissant; il en est de même de y et de x. On obtient ainsi la branche OPG, tangente à l'axe des x à l'origine, et qui tourne constamment sa convexité vers cet axe. La même conclusion

convient à l'autre branche OG′ qui est, par rapport à l'axe des abscisses, symétrique de la première; et, comme la courbe n'a aucun point situé du côté des x négatifs, on voit que l'origine est un point de rebroussement de première espèce.

Si du point A, où l'asymptote coupe l'axe OX, on abaisse une perpendiculaire AD sur la droite ODE ($y = mx$), cette perpendiculaire aura pour équation

$$y = -\frac{1}{m}(x - 2a),$$

et coupera la droite OE en un point D dont l'abscisse OF a pour valeur

$$2a \cdot \frac{1}{m^2+1}.$$

On sait d'ailleurs que l'abscisse OM du point P est égale à

$$2a \cdot \frac{m^2}{m^2+1}.$$

Il s'ensuit

$$\text{OM} + \text{OF} = 2a = \text{OA};$$

d'où

$$\text{OM} = \text{AF}, \quad \text{et} \quad \text{OP} = \text{DE}.$$

De plus, le point D appartient à une circonférence décrite sur OA comme diamètre; on déterminera donc les différents points de la courbe en menant par l'origine des sécantes telles que ODE, et en prenant sur chacune d'elles, à partir de l'origine, une distance OP égale à la partie de la sécante comprise entre l'asymptote TAT′, et la circonférence qui a pour diamètre l'axe OA de la courbe.

300. *Conchoïde.* — Soit à construire l'équation

$$(y^2 + x^2)(x - a)^2 = b^2 x^2,$$

dans laquelle on suppose $b < a$. En la résolvant par rap-

port à y, il vient

$$y = \pm \frac{x}{x-a} \sqrt{b^2 - (x-a)^2}.$$

Les valeurs de x plus grandes que $a+b$, ou moindres que $(a-b)$, rendent y imaginaire, en exceptant toutefois $x=0$ qui donne $y=0$. D'après cela, on voit que l'origine est un point *isolé*, la courbe étant entièrement comprise entre deux parallèles AB, A'B' (*fig.* 156), à l'axe des y, et à des distances $a-b$, $a+b$, de cet axe. La droite CD, qui a pour équation $x=a$, est asymptote à la courbe.

En faisant varier x depuis $a-b$ jusqu'à $a+b$, on aurait tous les points cherchés; mais la considération des coordonnées polaires conduit à une construction très-simple. Car, si l'on prend pour axe polaire la droite OX, en conservant la même origine, on aura

$$y^2 + x^2 = \rho^2, \quad x = \rho \cos \omega;$$

et, par suite, l'équation proposée deviendra

$$\rho^2 . (\rho \cos \omega - a)^2 = b^2 \rho^2 \cos^2 \omega;$$

d'où l'on tire successivement :

$$(\rho \cos \omega - a)^2 = b^2 \cos^2 \omega, \quad \rho \cos \omega - a = \pm b \cos \omega,$$

$$\rho = \frac{a}{\cos \omega} \pm b.$$

Or, l'équation $\rho = \frac{a}{\cos \omega}$ représente l'asymptote CD, dont la distance à l'origine est a; donc, le lieu dont il s'agit se détermine en menant du point O des sécantes telles que OF, à la droite CD, et en prenant, à partir du point F d'intersection, et de chaque côté, des distances FM, FM', égales à b. La courbe qui résulte de cette construction est ce qu'on nomme une *conchoïde;* elle a la forme indiquée (*fig.* 156) lorsqu'on suppose $b < a$.

301. *Lemniscate*, représentée par $y^2 = x^2(1 - x^2)$. — La courbe est symétrique par rapport aux axes; elle a pour centre l'origine, coupe l'axe des x à l'origine et en deux autres points dont les abscisses sont $+1$ et -1, et ne peut s'étendre au delà dans le sens des x : c'est ce qui résulte évidemment de l'équation proposée.

La somme des facteurs x^2, $(1 - x^2)$ étant invariable, le maximum de leur produit, y^2, est $\frac{1}{4}$; donc, le maximum de l'ordonnée est $\frac{1}{2}$, et correspond à $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. De plus, en faisant croître x de 0 à $\sqrt{\frac{1}{2}}$, la valeur de y va constamment en augmentant depuis 0 jusqu'à $\frac{1}{2}$; et, pour les valeurs de x croissantes de $\sqrt{\frac{1}{2}}$ à 1, l'ordonnée y diminue de $\frac{1}{2}$ à zéro. La tangente à la courbe au point dont l'ordonnée a la valeur maximum $\frac{1}{2}$, est parallèle à l'axe des x; car le coefficient angulaire de cette tangente, ayant pour expression $\frac{x - 2x^3}{y}$, se réduit à zéro quand $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

A l'origine, le coefficient angulaire $\frac{x - 2x^3}{y}$ devient $\frac{0}{0}$; il faut alors, pour avoir ses valeurs, recourir à l'équation du second degré,

$$\alpha^2 . f''_{y^2}(x', y') + 2\alpha . f''_{xy}(x', y') + f''_{x^2}(x', y') = 0, \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{367}, \mathit{R}.),$$

et qui, dans le cas actuel, se réduit à

$$\alpha^2 - 1 = 0,$$

et donne, par conséquent,

$$\alpha = \pm 1.$$

Ainsi, à l'origine, la courbe est tangente aux deux bissectrices DOD′, EOE′ (*fig.* 157) des angles que font entre eux les axes des coordonnées.

En considérant la seconde dérivée de l'ordonnée, on verra facilement que l'origine, O, est un point d'*inflexion* de chacune des deux branches AOC′, COA′ (nº **291**); et c'est, d'ailleurs, une conséquence de ce que le point dont il s'agit est le centre de la courbe.

De cette analyse, il résulte que la ligne représentée par l'équation

$$y^2 = x^2(1 - x^2)$$

a la forme indiquée par la *fig.* 157. Le centre de la courbe est, à la fois, un point double et un point d'inflexion.

302. Considérons encore l'équation algébrique

$$(y - x^2)^2 - x^5 = 0,$$

ou

(1) $$y = x^2 \pm x^2\sqrt{x}.$$

La courbe que l'équation (1) représente n'a aucun point situé du côté des abscisses négatives et s'étend à l'infini de l'autre côté; elle a pour diamètre la parabole $y = x^2$, car il est clair que cette dernière ligne divise en parties égales toutes les cordes de la courbe, parallèles à l'axe des y.

En séparant les deux valeurs de y, on a

(2) $$y = x^2 + x^2\sqrt{x},$$

(3) $$y = x^2 - x^2\sqrt{x}.$$

Le coefficient angulaire de la tangente en un point de la première branche, $y = x^2 + x^2\sqrt{x}$, est

$$\alpha = 2x + \frac{5}{2}x\sqrt{x};$$

pour la seconde branche, $y = x^2 - x^2\sqrt{x}$, il devient

$$\alpha' = 2x - \frac{5}{2}x\sqrt{x}.$$

A l'origine, on a

$$\alpha = 0, \quad \alpha' = 0;$$

donc les deux branches de la courbe sont tangentes à l'axe des x. Si l'on observe, de plus, qu'en donnant à x des valeurs positives, comprises entre 0 et 1, les deux valeurs de y sont positives, et qu'elles deviennent imaginaires lorsque x est négatif, on en conclura que l'origine des coordonnées est un point de rebroussement de *seconde espèce*.

La valeur de α, toujours positive, croît avec l'abscisse et l'ordonnée; il s'ensuit que la première branche OAB (*fig.* 158), entièrement située au-dessus de l'axe des x, tourne constamment sa convexité vers cet axe.

La seconde branche OA′B′, déterminée par l'équation

$$y = x^2 - x\sqrt{x},$$

s'élève d'abord au-dessus de l'axe des x, en partant de l'origine, et va couper cette droite à une distance de l'origine égale à l'unité. La première dérivée de α', ou la seconde dérivée de l'ordonnée, ayant pour expression $2 - \frac{15}{4}\sqrt{x}$, est positive pour des valeurs de x comprises entre 0 et $\left(\frac{8}{15}\right)^2$; elle s'annule quand $x = \left(\frac{8}{15}\right)^2$, et devient négative lorsque x prend des valeurs plus grandes. Par conséquent, la branche OA′B′ est convexe par rapport à l'axe des abscisses, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \left(\frac{8}{15}\right)^2$. Le point correspondant à cette dernière abscisse est un point d'inflexion. Depuis $x = \left(\frac{8}{15}\right)$ jusqu'à $x = 1$, l'ordonnée et sa seconde dérivée ont des signes contraires;

donc, dans cet intervalle, la branche OA′B′C est concave vers l'axe OX. Pour des valeurs de x plus grandes que l'unité, y est négatif, la courbe est située au-dessous de l'axe des x, et tourne sa convexité vers cet axe. Lorsque $x = \left(\frac{4}{5}\right)^2$, $\alpha' = 0$, la tangente est parallèle à l'axe des x, et la valeur de l'ordonnée est un maximum, car α' change de signe en s'annulant.

303. *Construction de courbes transcendantes.*

PREMIER EXEMPLE. $y = \sin x$.

En faisant croître x de 0 à $\frac{\pi}{2}$, la valeur de y augmente de 0 à 1; on obtient ainsi l'arc OA (*fig.* 159), qui tourne sa concavité vers l'axe des x, puisque la seconde dérivée $-\sin x$, de l'ordonnée, a un signe contraire à celui de l'ordonnée elle-même.

L'abscisse continuant d'augmenter, de $\frac{\pi}{2}$ à π, l'ordonnée diminue depuis 1 jusqu'à 0; on obtient l'arc AO′ égal à OA, et symétrique par rapport à la perpendiculaire AM, abaissée du point A sur l'axe des x. Ce second arc est, comme le premier, concave vers l'axe OX.

La tangente au point A est parallèle à l'axe des x, car la première dérivée de y, qui est $\cos x$, se réduit à zéro, quand $x = \frac{\pi}{2}$. L'ordonnée de ce point est un maximum.

Les valeurs de x comprises entre π et 2π, donnent l'arc O′A′O″, égal à OAO′, mais situé au-dessous de l'axe des x; des valeurs comprises entre 2π et 3π détermineraient un troisième arc égal aux deux premiers, et situé au-dessus de l'axe des abscisses, et ainsi de suite. Il est d'ailleurs évident, d'après la forme de l'équation, que l'origine des coordonnées est un centre, et qu'en faisant varier x depuis 0 jusqu'à $-\infty$, on trouvera à gauche de l'axe des y des arcs

égaux à ceux qu'on a trouvés à droite, mais dans une position inverse par rapport à l'axe des abscisses.

On voit aussi que l'origine est un point d'inflexion, car la dérivée seconde de l'ordonnée, $-\sin x$, devient nulle quand $x = 0$, et elle change de signe en passant par zéro. De même, on reconnaît que tous les points auxquels la courbe rencontre l'axe des x, sont des centres et des points d'inflexion, et que toutes les droites dirigées suivant les ordonnées maximum AM, A′M′, etc., sont des axes.

Enfin, les tangentes menées à la courbe par ses points d'intersection avec l'axe des abscisses, sont alternativement parallèles aux bissectrices OG, OG′, des angles YOX, Y′OX, puisque le coefficient angulaire de la tangente, $\cos x$, prend successivement les valeurs $+1$, -1, quand on remplace x par $0, \pi, 2\pi$, etc.

La surface d'un segment BB′CC′ de la courbe, compris entre l'axe des x, et les ordonnées BB′, CC′, de deux points B, C, de l'arc OAO′, a une expression très-simple que nous allons faire connaître.

Considérons la distance OB′ comme une quantité donnée a; il est clair que la surface du segment BB′CC′ sera une certaine fonction $\varphi(x)$ de l'abscisse variable $OC' = x$.

Si l'on donne à x un accroissement h aussi petit qu'on voudra, et que, pour plus de précision, on suppose que l'ordonnée augmente avec x, l'accroissement CC′DD′ de la fonction cherchée sera compris entre $h \times \sin x$ et $h \times \sin(x+h)$; par suite, le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable aura une valeur comprise entre $\sin x$ et $\sin(x+h)$; et, à la limite $h = 0$, ce rapport deviendra $\sin x$. Ainsi, la dérivée de $\varphi(x)$ est $\sin x$. Mais on sait que $\sin x$ est la dérivée de $-\cos x$, et que deux fonctions qui ont la même dérivée ne peuvent différer l'une de l'autre que par une constante; donc

$$\varphi(x) = c - \cos x.$$

Pour déterminer la constante c, il suffit d'observer que $\varphi(x)$ se réduit à zéro, lorsque $x = a$; il en résulte

$$c = \cos a,$$

et, par conséquent,

$$\varphi(x) = \cos a - \cos x.$$

Ainsi l'aire du segment BB'CC' a pour valeur

$$\cos a - \cos x.$$

En posant $a = 0$ et $x = \pi$, on trouve

$$\cos a - \cos x = 2;$$

donc la surface du segment compris entre l'axe des x et l'arc OAO' est double du carré de l'ordonnée maximum AM.

Deuxième exemple. $y = \text{séc}^2 x$ (*fig.* 160).

La courbe est divisée par l'axe des y en deux parties égales et symétriques; elle rencontre cet axe en un point A dont la distance à l'origine est l'unité. Si l'on fait croître x depuis 0 jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, l'ordonnée y augmente de 1 à l'infini; on détermine de cette manière un arc ABC qui a pour asymptote la droite FG dont l'équation est

$$x = \frac{\pi}{2}.$$

En continuant d'augmenter x de $\frac{\pi}{2}$ à π, on obtient l'arc E'D'A' qui est encore asymptote à la droite FG, mais de l'autre côté de cette droite. Les valeurs de x, croissantes de π à $\frac{3\pi}{2}$, donnent l'arc A'B'C' égal à ABC et ayant pour asymptote la droite F'G', parallèle à l'axe OY et située à une distance $\frac{3\pi}{2}$ de cet axe; et ainsi de suite. On voit donc que la courbe se compose d'une infinité de branches telles que E'A'C' comprises chacune entre deux asymptotes pa-

rallèles à l'axe des ordonnées, et à une distance l'une de l'autre égale à π. Il est d'ailleurs facile de reconnaître que toutes ces branches tournent leur convexité vers l'axe des x; qu'elles sont tangentes à une parallèle à cet axe aux points A, A', etc. Les droites dirigées suivant les ordonnées de ces points sont des axes de la courbe.

Enfin l'aire du segment OABN correspondant à l'abscisse ON $= x$ d'un point quelconque de l'arc ABC, a pour valeur tang x. En effet, désignons par $\varphi(x)$ la fonction de l'abscisse qui représente la valeur de ce segment, et faisons croître l'abscisse d'une très-petite quantité h. L'accroissement de l'aire du segment sera compris entre $h.\,\text{séc}^2 x$ et $h.\,\text{séc}^2(x+h)$. Le rapport de cet accroissement à celui de la variable x sera de même compris entre $\text{séc}^2 x$ et $\text{séc}^2(x+h)$. La limite de ce rapport aura donc pour valeur $\text{séc}^2 x$. Or $\text{séc}^2 x$ est la dérivée de tang x; donc $\varphi(x)$ et tang x ne peuvent différer que par une constante, c'est-à-dire qu'on a

$$\varphi(x) = \text{tang}\, x + c.$$

Lorsque $x = 0$, le segment OABN devient nul; par conséquent, $c = 0$. Il en résulte

$$\text{OABN} = \text{tang}\, x.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

TROISIÈME EXEMPLE. $y = \dfrac{1}{\log x}$ (*fig.* 161).

La courbe est entièrement située du côté des abscisses positives.

Lorsqu'on donne à x une valeur OM moindre que l'unité, l'ordonnée correspondante AM est négative; si x diminue depuis OM jusqu'à 0, l'ordonnée correspondante, toujours négative, décroît depuis AM jusqu'à 0; par conséquent, l'origine est un point de la courbe.

Si l'on fait croître l'abscisse x depuis OM jusqu'à OC$=1$,

l'ordonnée reste négative et augmente en valeur absolue de AM à l'infini. On détermine ainsi une branche OAD de courbe qui s'arrête à l'origine des coordonnées et s'étend du côté des x positifs, au-dessous de l'axe des x, à une distance infinie de cet axe, en ayant pour asymptote la droite CG', dont l'équation est

$$x = 1.$$

Cette branche est tangente à l'axe des y, à l'origine, car l'équation $y = \frac{1}{\log x}$ donne

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{x \log x},$$

et l'on sait que le produit $x . \log x$ devient nul quand $x = 0$.

La première dérivée y' de l'ordonnée est

$$y' = -\frac{1}{x . (\log x)^2};$$

la seconde dérivée

$$y'' = \frac{\log x + 2}{x^2 (\log x)^3};$$

elle est positive tant qu'on a

$$\log x + 2 < 0;$$

nulle lorsque

$$\log x + 2 = 0;$$

change de signe, en devenant négative, dès que

$$\log x + 2 > 0.$$

Or, l'égalité $\log x + 2 = 0$ donne

$$\log x = -2,$$

et, par suite,

$$y = -\frac{1}{2};$$

d'où je conclus que la branche OAD tourne sa concavité vers l'axe des x, depuis l'origine O jusqu'au point A, dont

l'ordonnée est $-\frac{1}{2}$; qu'en ce point il y a inflexion : la concavité se change en convexité par rapport à l'axe des abscisses.

En donnant à x des valeurs croissantes de 1 à ∞, l'ordonnée y diminue de ∞ à 0; on obtient la branche LIH qui, située entièrement au-dessus de l'axe des x, tourne constamment sa convexité vers cet axe, et a pour asymptote les deux droites CG, CX.

L'origine est, comme on voit, un point d'*arrêt*.

QUATRIÈME EXEMPLE. $y = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ (*fig.* 162).

Donnons à x une valeur positive quelconque $x' = \text{OM}$, il en résultera pour y une certaine valeur $\dfrac{x'}{1 + e^{\frac{1}{x'}}}$ de même positive. Si x décroît depuis x' jusqu'à zéro, y va aussi en diminuant, et il en est encore de même du rapport de y à x dont l'expression est $\dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$. Lorsque x s'annule, le rapport $\dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0$; donc, l'arc OA est tangent à l'axe des abscisses à l'origine des coordonnées.

Faisons, maintenant, augmenter x à partir de $x' = \text{OM}$. Le rapport $\dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ augmentera avec x, mais il a pour limite $\frac{1}{2}$, puisque $\dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}$ quand $x = \infty$. Afin de reconnaître s'il existe une asymptote parallèle à la droite $y = \frac{1}{2} \cdot x$, nous chercherons la limite de $(y - cx)$ (p. 131).

On a

$$y - cx = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} - \frac{x}{2} = x\left[\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} - \frac{1}{2}\right];$$

ou, en remplaçant x par $\frac{1}{z}$,

$$y - cx = \frac{\frac{1}{1 + e^z} - \frac{1}{2}}{z}.$$

Pour $z = 0$, la fraction $\frac{\frac{1}{1 + e^z} - \frac{1}{2}}{z}$ prend la forme $\frac{0}{0}$, mais sa vraie valeur est -1. Donc la branche OAD a pour asymptote la droite FL, dont l'équation est

$$y = \frac{x}{2} - 1.$$

Pour déterminer les points de la courbe $y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, dont l'abscisse x est négative, nous remplacerons x par $-z$, le rapport de l'ordonnée à l'abscisse deviendra alors

$$\frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{z}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{\frac{1}{z}}}};$$

il sera positif. Par conséquent, on obtiendra des points situés dans l'intérieur de l'angle Y′OX′.

Si l'on donne à z une valeur quelconque positive $z' = \text{OM}'$, il en résultera

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{\frac{1}{z'}}}},$$

et en faisant diminuer z depuis z' jusqu'à zéro, $\frac{y}{x}$ convergera vers l'unité. A la limite, lorsque $z = 0$, il vient

$$\frac{y}{x} = 1;$$

donc l'arc OA' est tangent à la bissectrice de l'angle Y'OX' au point O. Il s'ensuit que l'origine des coordonnées est un point *anguleux* ou *saillant*.

Lorsque z croît depuis $z' = OM'$ jusqu'à l'infini, l'ordonnée y devient, en valeur absolue, de plus en plus grande; le rapport de l'ordonnée à l'abscisse est convergent vers $\frac{1}{2}$. On peut donc présumer que la branche OA' a une asymptote parallèle à la droite $y = \frac{1}{2}x$. En cherchant la limite de $y - cx$, correspondante à $z = \infty$, on trouve -1; donc le prolongement FL' de la droite FL est asymptote à la branche OA'D' de la courbe.

304. *Construction de courbes dont les équations sont exprimées en coordonnées polaires.*

Premier exemple. (*Spirale d'Archimède.*) $\rho = r\omega$ (*fig.* 163).

En attribuant à ω des valeurs croissantes de 0 à l'infini, la valeur de ρ est positive et augmente de 0 à ∞; ces valeurs déterminent une courbe OABA'B'..., tangente à l'axe polaire à l'origine, et faisant, autour de ce point, un nombre indéfini de circonvolutions.

Les valeurs négatives de ω donneraient une courbe égale et symétriquement placée par rapport à la droite OY, qui est perpendiculaire à l'axe polaire OX et menée par le pôle.

Si l'on désigne par V l'angle que la tangente, en un point de la courbe, forme avec le rayon vecteur mené à ce point,

on aura

$$\operatorname{tang} V = \frac{\rho}{r} = \omega \quad \text{(p. 377)};$$

et la sous-tangente aura pour expression $\frac{r^2}{r}$.

On voit par quelle construction on déterminera la tangente à chaque point de la courbe.

Deuxième exemple. (*Limaçon de Pascal.*)

$$\rho = a \cos\omega \pm b \quad (\textit{fig. } 164).$$

On supposera $b < a$.

Le premier terme $a\cos\omega$ du second membre de l'équation proposée, représente évidemment un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont a est l'hypoténuse, et l'angle adjacent ω. Par conséquent, si l'on prend sur l'axe polaire OX, à partir de l'origine, la distance OA égale à a, et qu'on décrive sur OA, comme diamètre, une circonférence, le terme $a\cos\omega$ sera la valeur d'une corde OB, menée par le pôle, et faisant avec l'axe polaire l'angle ω. D'où il suit que, pour déterminer les différents points C, C′, etc., de la ligne $\rho = a\cos\omega \pm b$, il suffira de mener par l'origine O des cordes telles que OB, et de prendre sur la direction de chacune d'elles, de chaque côté de l'extrémité B, les distances BC, BC′, égales à b. Cette construction donne une courbe de la forme indiquée (*fig.* 164).

Troisième exemple. $\rho = \operatorname{tang} n\omega$ (le nombre n est supposé entier).

Les deux variables ω, ρ, s'annulant à la fois, la courbe passe par l'origine. En faisant croître ω depuis o jusqu'à $\frac{\pi}{2n}$, la valeur de ρ augmente de o à ∞. Pour savoir si la courbe a une asymptote parallèle à la direction du rayon polaire OH (*fig.* 165), qui forme, avec l'axe OX, l'angle $\frac{\pi}{2n}$,

il faut chercher la limite de $\rho . \sin\left(\frac{\pi}{2n} - \omega\right)$, lorsque $\omega = \frac{\pi}{2n}$ (nº 270). Cette limite s'obtiendra en divisant -1 par la valeur que prend la dérivée de la fonction de ω, que $\frac{1}{\rho}$ représente, en ayant soin de remplacer ω par $\frac{\pi}{n}$ dans la dérivée dont il s'agit (page 392). Or,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\operatorname{tang} n\omega},$$

et la dérivée de

$$\frac{1}{\operatorname{tang} n\omega} = -\frac{n . \operatorname{séc}^2 n\omega}{\operatorname{tang}^2 n\omega} = -\frac{n}{\sin^2 n\omega}.$$

Donc, en divisant -1 par cette dérivée, on a

$$\frac{\sin^2 n\omega}{n};$$

et, en remplaçant ω par $\frac{\pi}{2n}$, il vient

$$\frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{n}.$$

Par conséquent, la courbe a pour asymptote la droite FL, parallèle à OH, et à une distance OF de OH, égale à $\frac{1}{n}$.

D'après cela, on voit que les valeurs de ω, croissantes de 0 à $\frac{\pi}{2}$, donnent l'arc OD, qui part de l'origine des coordonnées polaires, et a pour asymptote la droite FL.

Si l'on fait croître ω depuis $\frac{\pi}{2n}$ jusqu'à $\frac{\pi}{n}$, on trouvera l'arc D'O, asymptote au prolongement FL' de FL, et qui se termine à l'origine, lorsque $\omega = \frac{\pi}{n}$.

Le rayon polaire est alors négatif et décroît, en valeur absolue, de ∞ à o.

En remplaçant, dans l'équation proposée, ω par $\omega' + \frac{\pi}{n}$, ce qui revient à prendre pour axe polaire la droite OX' qui fait avec l'ancien axe OX un angle égal à $\frac{\pi}{n}$, l'équation reste absolument la même. Par conséquent, les valeurs de ω', croissantes de o à $\frac{\pi}{n}$, détermineront deux nouveaux arcs égaux à OD, OD', ayant aussi une asymptote commune, et dont la situation relative à OX' sera la même que celle de OD, OD' par rapport à OX.

Il est maintenant facile de reconnaître que la courbe se composera de $2n$ couples de branches telles que OD, OD', et qu'elle aura $2n$ asymptotes.

Quatrième exemple. $\rho = m + \cos n\omega$ (les coefficients m et n représentent deux nombres dont le second est supposé entier; la valeur de m est plus grande que l'unité).

La valeur de $\cos n\omega$ étant comprise entre $+1$ et -1, celle de ρ ne pourra varier que depuis $m+1$ jusqu'à $m-1$. Si l'on décrit de l'origine O des coordonnées comme centre, et avec des rayons représentés par $m+1$, $m-1$, deux circonférences concentriques ABC, *abc* (*fig.* 166), elles comprendront entre elles tous les points de la courbe proposée. On aura d'ailleurs tous les points de cette courbe, situés sur la première circonférence ABC, en posant $\rho = m+1$; d'où

$$\cos n\omega = 1, \quad n\omega = 2k\pi, \quad \omega = \frac{2k\pi}{n};$$

les valeurs de ω seront donc

$$0, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{4\pi}{n}, \ldots, \quad \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Il est clair qu'on obtient ainsi les sommets A, B, C, etc.,

d'un polygone régulier de n côtés. De plus, la courbe est, en ces points, tangente à la circonférence ABC; car l'angle que le rayon vecteur forme avec la tangente à la courbe, à l'un quelconque des points dont il s'agit, est droit. En effet, si l'on désigne par V l'angle de la tangente et du rayon polaire mené au point de contact, on a (n° 260)

$$\operatorname{tang} V = \frac{\rho}{f'(\omega)} = -\frac{m + \cos n\omega}{n.\sin n\omega}.$$

Or $\sin n\omega = 0$ quand $\omega = \frac{2k\pi}{n}$.

Pour déterminer les points communs à la courbe et à la circonférence intérieure *abc*, on posera $\rho = m - 1$; d'où

$$\cos n\omega = -1, \quad n\omega = (2k+1)\pi, \quad \omega = \frac{(2k+1)\pi}{n}.$$

Les valeurs de ω correspondantes aux points cherchés seront

$$\frac{\pi}{n}, \quad \frac{3\pi}{n}, \ldots, \quad \frac{(2n-1)\pi}{n},$$

et les points obtenus représenteront évidemment les sommets a, b, c, etc., d'un polygone régulier inscrit dans le cercle *abc*. On voit aussi que la courbe est tangente à ce cercle aux sommets a, b, c, etc., du polygone régulier, puisque $\operatorname{tang} V = \infty$ lorsque $\omega = \frac{(2k+1)\pi}{n}$.

Si l'on fait croître ω de 0 à $\frac{\pi}{n}$, le rayon vecteur ρ diminue de $m+1$ à $m-1$, et on obtient l'arc Aa. L'angle ω augmentant de $\frac{\pi}{n}$ à $\frac{2\pi}{n}$, le rayon ρ est croissant depuis $m-1$ jusqu'à $m+1$, et ses valeurs déterminent l'arc aB; et ainsi de suite. La courbe aura donc la forme indiquée *fig.* 166.

Les n droites OA, OB,..., OG sont des *axes*. En effet, lorsqu'on change le signe de ω, l'équation $\rho = m + \cos.n\omega$

reste la même; donc l'axe OX des coordonnées polaires est un axe de la courbe. Si, de plus, on remplace dans l'équation $\rho = m + \cos . n\omega$, la variable ω par $\omega' + \frac{2k\pi}{n}$, il vient

$$\rho = m + \cos . n\omega',$$

quelle que soit la valeur de k.

Donc les droites OB, OC,..., OG, divisent chacune la courbe en deux parties égales et symétriques.

305. Nous proposerons, comme exercices, les questions suivantes :

Construire les équations :

I. $y = (x - a)\sqrt{x - b}$ (la courbe a un point *conjugué* dont l'abscisse est a, si $a < b$; et un point *multiple* dont l'abscisse est a, lorsque $b > a$).

II. $y^4 - 96 . a^2 y^2 + 100 a^2 x^2 - x^4 = 0$ (la courbe que cette équation représente a été nommée *courbe du diable*. Elle est formée de trois branches séparées. L'origine des coordonnées est à la fois un point d'inflexion et un point multiple).

III. $y = e^{\frac{1}{x}}$ (l'origine des coordonnées est un point d'arrêt).

IV. $x^y = y^x$. (En prenant pour inconnue auxiliaire le rapport $\frac{y}{x} = t$, on déduit de l'équation proposée

$$x^{tx} = t^x x^x; \quad \text{d'où} \quad x^t = tx;$$

et, par suite,

$$x = t^{\frac{1}{t-1}}, \quad \text{et} \quad y = t^{\frac{t}{t-1}}.$$

C'est la solution donnée par Euler.)

V. $\rho = a^{\omega}$. (*Spirale logarithmique.*)

VI. $\rho = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega}{\cos \omega}$. (*Quadratrice.*)

Lieux géométriques :

I. Trouver le lieu des points tels, que le produit de leurs distances à deux points donnés soit égal à un carré donné. (Ellipse de *Cassini.*)

II. Lieu géométrique des points dont le produit des distances à deux points donnés soit égal au carré de la demi-distance des deux points donnés. (*Lemniscate* de *Bernoulli.*)

III. Les deux extrémités d'une droite, dont la longueur est invariable et connue, glissent sur les deux côtés d'un angle droit, donnés de position; d'un point pris sur la bissectrice de cet angle, on abaisse une perpendiculaire sur la droite mobile : trouver le lieu du pied de la perpendiculaire. (*Scarabée.*)

IV. Déterminer l'équation de la courbe décrite par un point d'une circonférence dont on donne le rayon, et qui roule sur une droite indéfinie donnée de position. (*Cycloïde.*)

V. Ligne décrite par un point d'une circonférence qui roule sur une autre circonférence fixe. (*Épicycloïde.*)

VI. Lieu de la projection du centre d'un cercle sur les tangentes à la circonférence.

VII. Lieu géométrique du sommet d'un angle égal à un angle donné et circonscrit à une ellipse. — Même question pour l'hyperbole et la parabole. — Examen du cas particulier où l'angle donné est droit.

VIII. Deux des sommets d'un triangle semblable à un triangle donné glissent sur deux circonférences dont on connaît les centres et les rayons; déterminer la ligne décrite par le troisième sommet du triangle.

IX. Lieu géométrique du centre du cercle inscrit dans un triangle dont la base et la hauteur sont données.

CHAPITRE VINGTIÈME.

USAGE DES COURBES DANS LES QUESTIONS D'ALGÈBRE.

§ I. — *Construction des racines d'une équation.*

306. Pour déterminer par un tracé graphique les racines d'une équation de forme quelconque à une inconnue, $f(x) = 0$, il suffit de construire la ligne $y = f(x)$, et de chercher les points où elle coupe l'axe des x; les valeurs des abscisses de ces points devront vérifier l'équation $f(x) = 0$, puisque leurs ordonnées sont nulles. Les valeurs numériques de ces abscisses s'obtiendront, d'ailleurs, en comparant à la droite choisie pour unité de longueur, les distances de l'origine aux points d'intersection dont il s'agit.

Comme les constructions graphiques sont entachées d'erreurs dont il n'est pas toujours facile d'apprécier l'étendue, on conçoit que le procédé qui vient d'être indiqué ne donne pas, dans tous les cas, avec certitude les racines à l'approximation désignée; mais il peut souvent servir à diriger le calcul de la séparation des racines, en montrant vers quelles valeurs les substitutions doivent être faites.

Le tracé des courbes peut encore être utilement employé pour vérifier quelques principes d'algèbre, et quelquefois pour en découvrir.

Par exemple, en traçant une courbe $y = f(x)$, on reconnaît immédiatement que si $f(x)$ est une fonction continue qui prenne des signes contraires, lorsqu'on y remplace successivement x par deux nombres réels α, β, l'équation doit avoir, au moins, une racine comprise entre α et β.

Lorsque $f(x)$ est une fonction algébrique entière, telle

que $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} +$ etc., l'équation représente (*fig.* 167) une parabole du degré m, et, dans ce cas, à chaque valeur de x correspond une valeur de y, et une seule. En supposant que l'équation $f(x) = 0$ ait deux racines égales à OE, la courbe sera tangente à l'axe des x au point E; on aura donc, en désignant OE par α,

$$f'(\alpha) = 0.$$

Ce qui montre que toute racine double, α, de $f(x) = 0$ annule la première dérivée $f'(x)$ de $f(x)$, ce qu'on savait déjà.

On voit de même qu'il existe une valeur OF′ de x, comprise entre les racines consécutives OB, OC, qui doit correspondre à un maximum FF′ de l'ordonnée, c'est-à-dire à un point F de la courbe, où la tangente sera parallèle à l'axe des x. Par conséquent, deux racines consécutives OB, OC de l'équation $f(x) = 0$, comprennent entre elles, au moins, une racine OF′ de la première dérivée $f'(x) = 0$ de cette équation. C'est le principe de Rolle.

Enfin, supposons que l'arc MM′M″A tourne sa convexité vers l'axe des x; si l'on mène en différents points de cet arc, les tangentes MP′, M′P″, etc., les points P′, P″, etc., où elles couperont l'axe des x, se rapprocheront de plus en plus du point A, de manière que les abscisses OP, OP′, OP″, etc., auront des valeurs convergentes avec la racine OA. Cela admis, nommons a la première valeur approchée OP de la racine OA, et remarquons que $\mathrm{MP} = f(a)$; le triangle rectangle MP′P donnera

$$\mathrm{PP'} = \frac{\mathrm{MP}}{\operatorname{tang} \mathrm{MP'P}} = -\frac{\mathrm{MP}}{\operatorname{tang} \mathrm{MP'X}} = -\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Donc, on aura une valeur plus approchée de la racine cherchée en ajoutant à a l'expression $-\frac{f(a)}{f'(a)}$. C'est *la méthode d'approximation de* Newton.

307. Au reste, on peut déterminer les racines réelles de l'équation $f(x)=0$, par une infinité de constructions différentes de celle que nous venons d'exposer, et qui consiste à couper l'axe des x par la ligne $y=f(x)$. Car l'équation $f(x)=0$ résulte de l'élimination de y entre le système de deux équations $\varphi(x,y)=0$, $\psi(x,y)=0$, qui peuvent avoir une infinité de formes différentes, puisque l'une d'elles est arbitraire. Or, les abscisses des points communs à ces deux lignes représenteront, évidemment, les racines de $f(x)=0$; et pour qu'on soit certain que les deux lignes se coupent en autant de points que l'équation $f(x)=0$ a de racines réelles, il suffira que y n'entre qu'au premier degré dans l'une des deux équations

$$\varphi(x,y)=0,\quad \psi(x,y)=0.$$

308. *Il est toujours possible d'obtenir les racines réelles d'une équation du quatrième ou du troisième degré par l'intersection d'une parabole donnée et d'une circonférence.*

Considérons l'équation du quatrième degré

$$x^4+px^2+qx+r=0, \tag{1}$$

et représentons par

$$x^2=ay, \tag{2}$$

la parabole donnée. Si, dans l'équation (1) on remplace x^4 par a^2y^2, il viendra

$$a^2y^2+px^2+qx+r=0. \tag{3}$$

En multipliant (2) par un coefficient arbitraire λ, et ajoutant membre à membre avec (3), on aura

$$a^2y^2+(p+\lambda)x^2+qx+r=a\lambda y. \tag{4}$$

Et, si l'on pose $p+\lambda=a^2$, l'équation (4) sera celle de la circonférence cherchée.

Quant à l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$, on y introduit une racine nulle, en multipliant par x le premier membre, ce qui donne

$$x^4 + px^2 + qx = 0,$$

et on rentre, ainsi, dans le cas précédent.

Les problèmes qui ont pour objets : de trouver le côté d'un cube double d'un cube donné ; de diviser un angle en trois parties égales ; d'insérer deux moyennes géométriques entre deux droites données, se résolvent simplement par l'intersection d'une parabole donnée et d'un cercle, parce qu'ils conduisent à des équations du troisième degré.

§ II. — *Intersection de deux courbes du second degré.*

309. *Étant données les équations de deux courbes du second degré, trouver l'équation générale des courbes du second degré qui passent par les quatre points d'intersection des deux premières.*

Soient

$$(1) \qquad f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0,$$

les équations données, et λ un coefficient arbitraire ; l'équation demandée sera

$$(2) \qquad \lambda f(x, y) + \varphi(x, y) = 0.$$

Car $\lambda f(x, y) + \varphi(x, y) = 0$ représente évidemment une ligne du second degré qui passe par les points communs aux courbes $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$, quelle que soit la valeur attribuée au coefficient λ ; et il n'est pas moins clair qu'en donnant à λ une valeur convenablement choisie, on pourra disposer, comme on voudra, d'un cinquième point de la ligne que l'équation $\lambda f(x, y) + \varphi(x, y) = 0$ représente ; donc, cette équation est celle de toutes les lignes du second degré qui passent par les quatre points d'intersection des courbes proposées.

310. *Disposer de l'indéterminée λ que renferme cette équation $[\lambda f(x, y) + \varphi(x, y) = 0]$, de manière qu'elle puisse se décomposer en deux facteurs du premier degré.*

Les équations (1) du numéro précédent seront généralement

$$(1) \qquad ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$

$$(2) \qquad a'y^2 + b'xy + c'x^2 + d'y + c'x + f' = 0;$$

par suite, $\lambda f(x, y) + \varphi(x, y) = 0$ devient

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (a\lambda + a')y^2 + (b\lambda + b')xy + (c\lambda + c')x^2 \\ + (d\lambda + d')y + (e\lambda + e')x + (f\lambda + f') = 0, \end{array} \right.$$

et donne, lorsque $a\lambda + a'$ n'est pas nul,

$$(4) \qquad y = -\left[\frac{mx + n}{2(a\lambda + a')}\right] \pm \frac{1}{2(a\lambda + a')} \cdot \sqrt{px^2 + 2qx + r},$$

en posant

$$b\lambda + b' = m, \quad d\lambda + d' = n,$$

$$(b\lambda + b')^2 - 4(a\lambda + a')(c\lambda + c') = p,$$

$$[(b\lambda + b')(d\lambda + d') - 2(a\lambda + a')(e\lambda + c')] = q,$$

$$(d\lambda + d')^2 - 4(a\lambda + a')(f\lambda + f') = r.$$

Pour que l'équation (4) soit décomposable en facteurs du premier degré, il faut que $px + 2qx + r$ soit un carré, ce qui donne

$$(5) \qquad q^2 - pr = 0.$$

En remplaçant q, p, r, par leurs valeurs, et supprimant le facteur commun $a\lambda + a'$ qui ne doit pas être nul, on parvient à une équation du troisième degré,

$$(6) \qquad \text{A}\lambda^3 + \text{B}\lambda^2 + \text{C}\lambda + \text{D} = 0,$$

dans laquelle les deux coefficients A et D sont précisément les polynômes qui doivent être annulés, quand les équations proposées (1) et (2) sont décomposables en facteurs du premier degré. Donc, aucun de ces deux coefficients ne

sera nul, et par conséquent l'équation (6) aura au moins une racine, λ', réelle, finie, et différente de zéro.

Si l'on remplace λ par ce nombre réel λ', le trinôme $px^2 + qx + r$ deviendra un carré, et, en extrayant sa racine, l'équation (4) prendra la forme

$$(7) \quad y = -\left[\frac{m'x + n'}{2(a\lambda' + a')}\right] \pm \frac{1}{2(a\lambda' + a')}\left(x\sqrt{p'} + \frac{q'}{2\sqrt{p'}}\right),$$

en désignant par m', n', p', q', les valeurs de m, n, p, q; elle sera décomposée en facteurs du premier degré, et représentera le système de deux droites, quand p' ne sera pas négatif. Les intersections de ces deux droites avec l'une quelconque des deux courbes proposées $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$, seront les points communs à ces deux courbes.

Lorsque les courbes représentées par les équations $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$, se coupent en quatre points, l'équation (6) $A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D = 0$ a nécessairement ses trois racines réelles, et aucune des valeurs de p correspondantes à ces racines ne peut être négative. Car, dans ce cas, il existe trois systèmes de deux droites qui passent par les quatre points communs aux deux courbes données. Si l'on désigne par m'', n'', p'', q'', les valeurs de m, n, p, q, correspondantes à une seconde racine λ'' de l'équation en λ, on aura pour équation du second système de droites

$$(8) \quad y = -\left[\frac{m''x + n''}{2(a\lambda'' + a')}\right] \pm \frac{1}{2(a\lambda'' + a')}\left(x\sqrt{p''} + \frac{q''}{2\sqrt{p''}}\right),$$

et les solutions communes aux équations du premier degré (7) et (8) donneront les coordonnées des points communs aux deux courbes proposées.

Si les courbes proposées ont le même centre, les quatre points auxquels elles se coupent sont les sommets d'un pa-

rallélogramme; il faudra donc que deux des trois systèmes de droites qui passent par ces points se composent de parallèles; par conséquent, deux des valeurs de λ annuleront à la fois p et q, et feront prendre à l'équation (4) la forme

$$y = -\left[\frac{mx + n}{2(a\lambda + a')}\right] \pm \frac{1}{2(a\lambda + a')}\sqrt{r}.$$

Dans ce cas, les fonctions de λ, désignées par p et q, doivent avoir un facteur commun du second degré en λ; et comme elles ne sont pas d'un degré supérieur au second, elles ne pourront différer l'une de l'autre que par un facteur θ indépendant de λ. La relation

$$q^2 - pr = 0$$

deviendra donc

$$q^2 - qr\theta = 0,$$

et donnera les deux équations du second degré

$$q = 0, \quad q - \theta r = 0,$$

qui ont l'une et l'autre leurs coefficients rationnels. Or, on a vu que l'expression $q^2 - pr$ admettant pour diviseur $a\lambda + a'$, l'équation

$$q^2 - pr = 0$$

a une racine égale à $-\frac{a'}{a}$; il s'ensuit que $-\frac{a'}{a}$ est racine de l'une des équations du second degré

$$q = 0, \quad q - \theta r = 0;$$

donc la seconde racine de la même équation s'exprimera en fonction rationnelle des coefficients a, b, etc. Il en faut conclure que si les courbes proposées ont le même centre, l'équation en λ aura au moins une de ses trois racines commensurables.

Prenons pour exemple les courbes du second degré re-

présentées par les équations

$$3y^2 - 14xy + 8x^2 + 2y - 8x + 3 = 0,$$
$$7y^2 - 26.xy + 17x^2 + 6y - 14x + 3 = 0$$

L'équation générale des lignes du second degré qui passent par les points communs à ces deux courbes, sera

$$(7 + 3\lambda)y^2 - 2(13 + 7\lambda)xy + (17 + 8\lambda)x^2$$
$$+ 2(3 + \lambda)y - 2(7 + 4\lambda)x + 3(1 + \lambda) = 0.$$

On en tire

$$(9)\left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{(13 + 7\lambda)x - (3 + \lambda)}{7 + 3\lambda} \\ \pm \dfrac{1}{7+3\lambda}\sqrt{25(\lambda^2+3\lambda+2)x^2+10(\lambda^2+3\lambda+2)x-4(2\lambda^2+6\lambda+3)}, \end{array}\right.$$

ce qui donne

$$p = 25(\lambda^2 + 3\lambda + 2), \quad q = 5(\lambda^2 + 3\lambda + 2),$$
$$r = -4(2\lambda^2 + 6\lambda + 3).$$

La relation $q^2 - pr = 0$ devient donc

$$(\lambda^2 + 3\lambda + 2)^2 + 4(\lambda^2 + 3\lambda + 2)(2\lambda^2 + 6\lambda + 3) = 0,$$

ou

$$(\lambda^2 + 3\lambda + 2)(9.\lambda^2 + 27\lambda + 14) = 0.$$

En égalant à zéro chacun des facteurs, il vient

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

d'où

$$\lambda = -1, \quad \lambda = -2,$$

et

$$9\lambda^2 + 27\lambda + 14 = 0,$$

équation qui a pour racines $-\frac{2}{3}$, $-\frac{7}{3}$; la seconde, $-\frac{7}{3}$, doit être rejetée parce qu'elle annule le dénominateur des valeurs de y, déterminées par l'équation (9).

Il en résulte que les trois valeurs de λ sont -1, -2, $-\frac{2}{3}$.

Si l'on remplace successivement λ par -1, et -2 dans l'équation (9), on aura

$$(10)\qquad y=\frac{3x-1\pm 1}{2},$$

$$(11)\qquad y=-x-1\pm 2.$$

En résolvant ces dernières équations, on trouve les quatre solutions suivantes :

$$x=\frac{2}{5},\quad y=\frac{3}{5};$$

$$x=-\frac{6}{5},\quad y=-\frac{9}{5};$$

$$x=\frac{4}{5},\quad y=\frac{1}{5};$$

$$x=-\frac{4}{5},\quad y=-\frac{11}{5}.$$

Ces valeurs de x et de y sont les coordonnées des quatre points d'intersection des deux courbes proposées.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A TROIS DIMENSIONS.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORÈMES SUR LES PROJECTIONS.

311. Lorsqu'une *droite finie* AB et une *droite indéfinie* OX (*fig.* 168) sont ou ne sont pas dans un même plan, et que, des extrémités de la première, on abaisse sur l'autre les perpendiculaires AA′, BB′ qui, en général, ne sont point parallèles, la distance A′B′ est ce qu'on nomme la *projection* de AB sur OX, et ces deux lignes ont entre elles une relation remarquable. En effet, si, par le point B, on imagine un plan MBB′ perpendiculaire à OX, et que l'on mène jusqu'à ce plan la droite AC parallèle à OX, le triangle ACB sera rectangle en C, et l'angle BAC $= \alpha$ sera ce qu'on appelle l'angle de AB avec OX. Or ce triangle donne

$$AA' = AB \cos\alpha,$$

ou bien

$$A'B' = AB \cos\alpha : \qquad (1)$$

ainsi, *la projection d'une droite sur une autre est égale à la première droite multipliée par le cosinus de l'angle qu'elles font entre elles.*

312. Considérons un système de plusieurs droites consécutives telles que ABCD (*fig.* 169), et par les sommets A,

B, C, D menons des plans perpendiculaires à l'axe OX : les points A′, B′, C′, D′, où ils coupent cet axe, sont les projections des sommets, et les longueurs A′B′, B′C′, C′D′ sont les projections des côtés successifs AB, BC, CD. Traçons la droite AD, que nous nommerons *ligne résultante :* cette droite a évidemment A′D′ pour projection. Représentons par d, d', d'' les côtés consécutifs, par α, α', α'' les angles qu'ils forment avec les lignes AE, BE′, CE″ menées parallèlement à OX, et toutes dans le même sens; par Δ la résultante AD, et par φ l'angle DAE; les projections de ces diverses lignes seront exprimées par $d\cos\alpha$, $d'\cos\alpha'$, $d''\cos\alpha''$, $\Delta\cos\varphi$. Or, quand les angles α, α', α'' sont aigus, les cosinus sont positifs, et, par suite, les produits précédents le sont aussi : il est visible d'ailleurs qu'on obtient A′D′ en ajoutant les projections A′B′, B′C′, C′D′; donc on a

$$d\cos\alpha + d'\cos\alpha' + d''\cos\alpha'' = \Delta\cos\varphi. \tag{2}$$

S'il y a des angles obtus, par exemple si DCE″ ou α'' est obtus (*fig.* 170), il faut retrancher la projection C′D′ des précédentes pour avoir A′D′. Mais alors $d''\cos\alpha''$ est aussi un produit négatif; donc la formule ci-dessus donne encore la valeur de A′D′ ou $\Delta\cos\varphi$. Quel que soit, en général, le nombre des côtés placés entre les sommets extrêmes, il est aisé de voir que les angles obtus donnent des projections qu'il faut soustraire de celles qui correspondent aux angles aigus, et comme l'expression de chaque projection est positive ou négative, suivant que l'angle est aigu ou obtus, il en résulte que la formule (2) a lieu sans exception. Cette formule est la traduction algébrique de la proposition suivante :

La somme des projections de plusieurs droites consécutives sur un axe quelconque est égale à la projection de la ligne résultante.

313. Donnons à l'axe de projection différentes positions.

Supposens-le d'abord parallèle à la résultante; alors

$$\varphi = 0, \quad \text{d'où} \quad \Delta \cos \varphi = \Delta :$$

c'est la plus grande valeur que le prodnit puisse avoir. Quand l'axe est dans un plan perpendiculaire à la résultante, on a

$$\varphi = 90^\circ \quad \text{et} \quad \Delta \cos \varphi = 0.$$

Enfin, si l'axe en changeant de position continue de faire le même angle avec la résultante, le produit $\Delta \cos \varphi$ ne changera pas. On déduit de là les conséquences suivantes :

1°. La somme des projections de plusieurs droites consécutives est la plus grande possible, quand l'axe de projection est parallèle à la résultante, et cette somme maximum est égale à la résultante elle-même;

2°. La somme des projections est nulle sur tous les axes perpendiculaires à la résultante;

3°. Cette somme reste la même pour tous les axes qui font des angles égaux avec la résultante.

314. Soit OG (*fig.* 171) une droite donnée, et soient OX, OY, OZ trois axes perpendiculaires entre eux; si par le point G on mène des plans parallèles aux plans YOZ, XOZ, YOX, on forme un parallélipipède rectangle dont les arêtes contiguës OA, OB, OC sont les projections de OG sur les trois axes. Or le carré de la diagonale étant égal à la somme des carrés des trois côtés contigus, il en résulte que *la somme des carrés des projections d'une droite sur trois axes rectangulaires est égale au carré de cette droite.*

Si l'on veut convertir cet énoncé en formule, on fera

$$OG = d, \quad OA = f, \quad OB = g, \quad OC = h,$$

et l'on aura

$$f^2 + g^2 + h^2 = d^2.$$

Quand on supose OG $=1$, il est visible que DA $=\cos$ GOX,

OB = cos GOY, OC = cos GOZ; donc, en désignant ces trois angles par α, β, γ, on obtient

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

c'est-à-dire que *la somme des carrés des cosinus des angles qu'une droite fait avec trois axes rectangulaires est égale à l'unité.*

315. Le théorème 311 subsiste pour *une surface plane projetée sur un plan* quelconque. Considérons d'abord un triangle dont un des côtés soit parallèle au plan sur lequel on projette la figure : on pourra, sans altérer l'étendue de la projection, supposer que ce plan contienne le côté auquel il était parallèle. Soit donc ABC (*fig.* 172) un triangle dont un côté PC soit situé dans le plan de projection MN : en abaissant sur MN la perpendiculaire AA′, le triangle ABC aura pour projection A′BC. Cela posé, menons A′H perpendiculaire sur BC, et tirons AH. Cette dernière ligne sera aussi perpendiculaire sur BC, et, par suite, l'angle AHA′ mesurera l'inclinaison du plan ABC sur le plan MN. Nous représenterons cet angle par α. Les deux triangles A′BC et ABC ayant même base BC, sont entre eux comme leurs hauteurs A′H et AH, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{A'BC}{ABC} = \frac{A'H}{AH} = \frac{AH\cos\alpha}{AH} = \cos\alpha;$$

d'où l'on conclut

$$A'BC = ABC\cos\alpha.$$

Si le triangle ABC (*fig.* 173) est dans une position quelconque par rapport au plan de projection, on pourra supposer que ce plan passe par l'un des sommets B. Soit A′BC′ la projection de ABC; en prolongeant AC jusqu'à sa rencontre avec le plan MN, le point D sera sur A′C′, et les triangles A′BD, C′BD seront les projections de ABD et CBD.

D'après ce qui précède, on aura

$$A'BD = ABD \cos\alpha, \quad C'BD = CBD \cos\alpha;$$

et, par conséquent, en prenant la différence,

$$A'B'C' = ABC \cos\alpha.$$

La proposition qui vient d'être démontrée pourrait être présentée de la manière suivante :

Soit A'B'C' (*fig.* 174) la projection du triangle ABC sur un plan quelconque MN ; la figure ABCA'B'C' est un tronc de prisme triangulaire. Si l'on abaisse A'H perpendiculaire sur le plan ABC, l'angle des droites A'A et A'H sera celui de A'B'C' ou de MN avec ABC. En désignant toujours cet angle par α, on aura

$$A'H = AA' \cos\alpha;$$

par suite, la pyramide dont le sommet est A' et la base ABC, sera exprimée par

$$\tfrac{1}{3} ABC \cos\alpha \times AA',$$

puisque sa hauteur

$$A'H = AA' \cos\alpha.$$

Les pyramides dont les sommets sont B' et C' auront pour expressions de leurs volumes

$$\tfrac{1}{3} ABC \cos\alpha \times BB', \quad \tfrac{1}{3} ABC \cos\alpha \times CC'.$$

Par conséquent, si l'on représente par V le volume du tronc de prisme, on obtiendra

$$V = \tfrac{1}{3} ABC \cos\alpha\,(AA' + BB' + CC').$$

D'une autre part, si l'on prend A'B'C' pour base, on trouvera

$$V = \tfrac{1}{3} A'B'C'(AA' + BB' + CC');$$

donc, enfin,

$$A'B'C' = ABC \cos\alpha.$$

316. Maintenant, soient P un polygone plan, et P' sa projection sur un plan fixe. Si l'on décompose le premier en

triangles T, T′, T″, etc., dont les projections soint t, t', t'', etc., on aura (nº 315)

$$t = \mathrm{T}\cos\alpha,\quad t' = \mathrm{T}'\cos\alpha,\quad t'' = \mathrm{T}''\cos\alpha,\ldots,$$

et, en ajoutant membre à membre, il viendra

$$\mathrm{P}' = \mathrm{P}\cos\alpha.$$

Ce résultat s'étend au cas d'une aire plane S terminée par *une ligne courbe ou mixte;* car, en y inscrivant un polygone P, et en désignant par S′ et P′ les projections de ces deux surfaces sur le plan fixe, on voit sans peine qu'à mesure qu'on multipliera les côtés du polygone, les deux quantités constantes S′ et S cos α seront *les limites* des deux quantités variables P′ et P cos α : or, d'après la formule précédente, ces deux dernières étant toujours égales entre elles, on en conclut que leurs limites sont aussi égales, c'est-à-dire que

$$\mathrm{S}' = \mathrm{S}\cos\alpha.$$

Donc, en général, *la projection d'une aire plane quelconque* sur un plan, est égale au produit de cette aire par le cosinus de l'angle que font entre eux les deux plans.

317. Si l'on projette la *surface plane* P sur trois plans rectangulaires avec lesquels elle forme les angles α, β, γ, on aura, pour les trois projections P′, P″, P‴ de cette surface,

$$\mathrm{P}' = \mathrm{P}\cos\alpha,\quad \mathrm{P}'' = \mathrm{P}\cos\beta,\quad \mathrm{P}''' = \mathrm{P}\cos\gamma;$$

puis, en faisant la somme des carrés, et se rappelant (nº 314) que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, on sera conduit à cette relation remarquable

$$\mathrm{P}'^2 + \mathrm{P}''^2 + \mathrm{P}'''^2 = \mathrm{P}^2.$$

CHAPITRE DEUXIÈME.

DES COORDONNÉES ET DES LIEUX DANS L'ESPACE.

318. Pour déterminer la position des différents points de l'espace, on les rapporte à trois axes fixes formant un angle polyèdre. Ordinairement, ces plans sont perpendiculaires entre eux; mais nous ne ferons d'abord aucune supposition particulière. Soient (*fig.* 175) XOX′, YOY′, ZOZ′ les intersections deux à deux des plans que l'on considère, et M un point situé comme on voudra dans l'espace. Menons par ce point trois plans parallèles aux trois plans fixes, savoir : MBDC parallèle au plan YOZ, et qui coupe la ligne X′X en D; MAEC parallèle au plan XOZ, et qui coupe Y′Y en E; enfin MBFA parallèle au plan XOY, et qui coupe Z′Z en F. Le point M sera déterminé quand on connaîtra les points D, E, F; car en menant par ces points des plans respectivement parallèles aux trois plans fixes, ils se rencontreront au point M. D'une autre part, ces points se déterminent eux-mêmes au moyen des distances OD, OE, OF qu'on affecte du signe + ou du signe —, suivant leur situation à l'égard du point O.

Les distances OD, OE, OF prises avec les signes qui leur appartiennent se nomment les *coordonnées* du point M. Les droites X′X, Y′Y, Z′Z sont les *axes* des coordonnées; le point O où elles se rencontrent en est l'*origine*, et les plans XOY, XOZ, YOZ sont appelés plans des *coordonnées* ou simplement plans *coordonnés*. Comme on désigne les coordonnées d'une manière générale par x, y, z, on dit que X′X, Y′Y, Z′Z sont les axes des x, des y et des z, que XOY est le plan des xy, etc. On comprend sans peine que

les plans et les axes des coordonnées doivent être regardés comme indéfinis.

319. Les trois plans menés par le point M forment avec ceux des coordonnées un parallélipipède; par suite, on peut prendre indifféremment pour les coordonnées du point M, soit les distances OD, OE, OF qui sont sur les axes, soit les distances MA, MB, MC parallèles aux axes et partant du point M, soit encore les distances OD, CD, CM.

320. Les plans coordonnés, qu'on suppose prolongés indéfiniment, forment évidemment huit angles trièdres. Si l'on regarde comme positives les coordonnées comptées sur les axes OX, OY, OZ, et comme négatives celles qui sont comptées sur les prolongements OX′, OY′, OZ′, en désignant par a, b, c, les valeurs absolues des coordonnées du point M, quand ce point sera situé dans l'angle

OXYZ,	on aura	$x=+a$,	$y=+b$,	$z=+c$,
OX′YZ,		$x=-a$,	$y=+b$,	$z=+c$,
OXY′Z,		$x=+a$,	$y=-b$,	$z=+c$,
OXYZ′,		$x=+a$,	$y=+b$,	$z=-c$,
OX′Y′Z,		$x=-a$,	$y=-b$,	$z=+c$,
OX′YZ′,		$x=-a$,	$y=+b$,	$z=-c$,
OXY′Z′,		$x=+a$,	$y=-b$,	$z=-c$,
OX′Y′Z′,		$x=-a$,	$y=-b$,	$z=-c$.

Ce n'est qu'en ayant ainsi égard aux valeurs et aux signes de ses coordonnées que la position d'un plan sera fixée complétement. Il est visible que si ces longueurs étaient données d'une manière générale, on devrait, pour chacun des axes, les prendre des deux côtés de l'origine, et qu'alors on trouverait huit points différents.

Si l'une des coordonnées est nulle, le point est sur le plan des deux autres. Par exemple, si l'on a

$$x=a,\quad y=b,\quad z=0,$$

il est dans le plan des xy. Lorsque deux coordonnées sont nulles, le point est situé sur l'axe de la troisième. Ainsi, en prenant

$$x=a,\quad y=0,\quad z=0,$$

il sera sur l'axe des x. Enfin, le point est placé à l'origine quand on a en même temps

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0.$$

Les points A, B, C où les lignes menées du point M parallèlement aux axes rencontrent les plans coordonnés, se nomment les *projections* du point M, et ces projections sont dites *orthogonales* ou *obliques*, selon qu'elles sont faites par des perpendiculaires ou par des obliques.

Les coordonnées du point M de l'espace étant a, b, c, il est visible qu'on a

$$x=a,\quad y=b,\quad z=0,$$

pour la projection C sur le plan des xy;

$$x=a,\quad y=0,\quad z=c,$$

pour la projection B sur le plan des xz;

$$x=0,\quad y=b,\quad z=c,$$

pour la projection A sur le plan des yz.

321. Considérons maintenant une surface quelconque, et supposons qu'on ait pris arbitrairement deux des coordonnées, par exemple

$$x=\mathrm{OD} \quad \text{et} \quad y=\mathrm{CD}:$$

en menant la droite CM (*fig.* 175) parallèle à OZ, elle ira rencontrer la surface en un point M, ou en plusieurs points qui seront complétement déterminés. On conclut de là qu'il doit exister entre x, y, z une relation telle, que deux de ces quantités étant données, on puisse en déduire les valeurs de la troisième. L'équation qui exprime cette relation se

nomme *l'équation de la surface*; et, réciproquement, *la surface est le lieu de l'équation.*

On est ainsi conduit à regarder une équation entre x, y, z comme représentant une surface. Démontrons cette proposition importante. Soit

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation dont il s'agit. Donnons à la variable z, par exemple, une certaine valeur γ, et traçons sur le plan des xy la courbe qui est représentée par l'équation résultante

$$F(x, y, \gamma) = 0.$$

Si par tous ses points nous menons à OZ (*fig.* 176) des parallèles qui soient égales à γ, nous formerons une courbe plane, égale et parallèle à celle que nous avons tracée sur le plan des xy, et qui sera telle, que les coordonnées de chacun de ses points seront des solutions de l'équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

les points correspondants des deux courbes ayant toujours le même x et le même y. Si l'on donne à z de nouvelles valeurs γ', γ'', γ''', etc., on obtiendra de nouvelles courbes parallèles au plan des xy, et qui pourront être aussi rapprochées les unes des autres qu'on le voudra; par conséquent, le lieu géométrique d'une équation à trois variables est *une surface* dont la nature dépend de la forme de la fonction F.

322. Lorsque l'équation proposée ne renferme que deux variables, comme

$$F(x, y) = 0,$$

nous ferons remarquer que si l'on ne considère que les points du plan des xy, l'équation représente en général, sur ce plan, une ligne CD. En menant par les différents points de cette ligne des parallèles à l'axe OZ, on obtiendra une

surface cylindrique, dans le sens général de ce mot. Or un point quelconque H de cette surface, quel que soit le z, aura toujours le même x et le même y que sa projection M; par conséquent, les coordonnées d'un point quelconque de ce cylindre satisferont à la relation

$$F(x, y) = 0,$$

qui ne contient pas la variable z, tandis que tout point G pris hors de la surface, ayant une projection K qui ne tombe pas sur la courbe CD, ne pourra vérifier par ses coordonnées

$$x = OL, \quad y = KL,$$

l'équation de la surface. On doit conclure de là que l'équation

$$F(x, y) = 0$$

représente une surface cylindrique parallèle à l'axe OZ. Une conséquence semblable s'applique aux équations

$$F(x, z) = 0, \quad F(y, z) = 0.$$

Donc *toute équation entre deux variables appartient à une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe sur lequel on compte les coordonnées qui n'entrent pas dans l'équation*, et dont la *trace* sur le plan des deux autres est représentée par cette même équation. Ajoutons toutefois que si l'on voulait définir analytiquement la courbe CD, il faudrait employer les équations simultanées

$$F(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad z = 0,$$

parce qu'alors il n'y aurait plus, sur tout le cylindre, que les points de sa base qui vérifieraient les deux relations.

323. On peut conclure, comme cas particulier du précédent, que si l'équation à deux variables est du premier degré, c'est-à-dire de la forme

$$y = ax + b,$$

elle appartient, non-seulement *à une droite* RS, dont on sait

déterminer la position sur le plan des xy, mais encore à tous les points du plan RST, mené par cette droite parallèlement à l'axe OZ : ce plan, en effet, n'est autre chose qu'un cylindre dont la base serait rectiligne.

Quand l'équation ne contient qu'une coordonnée, comme

$$F(x)=0,$$

on en tire pour cette coordonnée des valeurs constantes, et chacune de ces valeurs, quand elle est réelle, détermine un plan parallèle à celui des autres coordonnées. En effet, si $x=a$ est une de ces valeurs, et si l'on mène, parallèlement au plan des yz, un plan qui rencontre l'axe des x à une distance a de l'origine, à droite ou à gauche, suivant le signe de a, il est visible que pour tous les points de ce plan, x est égal à a, et que pour tous les points hors de ce plan, x est différent de a. Donc *toute équation à une seule variable représente un système de plans parallèles aux deux axes dont les coordonnées n'entrent pas dans cette équation.*

Il est clair alors que

$$z=0$$

est l'équation caractéristique du plan XY, et que

$$y=0, \quad x=0$$

représentent les deux autres plans coordonnés XZ et YZ.

On conclut de ce que nous venons de dire que les égalités

$$x=a, \quad y=b, \quad z=c,$$

prises séparément, représentent trois plans parallèles à ceux des coordonnées ; donc, étant prises simultanément, elles déterminent le point d'intersection des trois plans. Ce point est celui qui a pour coordonnées a, b, c, et, pour cette raison, on dit que

$$x=a, \quad y=b, \quad z=c$$

sont les *équations de ce point.*

324. *Une équation à une, deux ou trois variables peut ne représenter qu'un système de lignes ou de points isolés, ou même ne rien représenter,* suivant qu'elle peut se décomposer en deux ou trois autres, ou qu'elle ne peut être vérifiée par aucun système de valeurs réelles. Ainsi, les équations

$$x^2 + a^2 = 0, \quad x^2 + y^2 + a^2 = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 + a^2 = 0$$

ne représentent rien.

L'équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 0$$

représente le point (a, b, c); car elle ne peut être vérifiée qu'en posant à la fois

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c,$$

c'est-à-dire qu'elle n'admet qu'un système de valeurs réelles. Mais l'équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$$

étant satisfaite, quel que soit z, par

$$x = a, \quad y = b,$$

représente par conséquent tous les points qui ont le point (a, b) pour projection sur le plan de xy, c'est-à-dire l'intersection des plans dont les équations sont

$$x = a, \quad y = b.$$

325. Actuellement, si l'on considère *deux équations simultanées*

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0,$$

c'est-à-dire dans lesquelles les variables seront censées recevoir à la fois les mêmes valeurs, ce qui n'en laisse plus qu'une seule arbitraire, z par exemple, ce système représentera une ligne droite ou courbe, puisqu'il ne pourra convenir qu'aux points situés en même temps sur les deux

surfaces, c'est-à-dire à leur commune section. Réciproquement, le seul moyen qu'on ait pour définir une courbe dans l'espace étant d'assigner deux surfaces connues dont elle soit l'intersection, on ne pourra représenter analytiquement cette ligne que par deux équations simultanées. Les équations des deux surfaces qui contiennent une ligne, étant prises conjointement, se nomment les *équations de cette ligne*. Comme il existe une infinité de surfaces différentes qui passent par une même ligne, il y a aussi une infinité de surfaces qui peuvent, prises deux à deux, représenter cette ligne. On fait disparaître l'indétermination en prenant, pour les deux surfaces, des cylindres parallèles à deux des axes coordonnés. Ainsi, pour représenter une courbe MM'M''... (*fig.* 177) située d'une manière quelconque dans l'espace, on imagine pour tous les points de cette ligne des parallèles à l'axe OZ; ces droites, dont l'ensemble formera bien une surface cylindrique, rencontreront le plan XY suivant une ligne CC'C''..., qui, en général, sera une courbe, et que l'on nomme la *projection* de MM'M''... sur ce plan. Si l'on conçoit de même par la ligne MM'M''..., deux cylindres parallèles l'un à OX, l'autre à OY, on obtiendra les deux autres projections AA'A''..., BB'B''..., et la courbe dans l'espace sera évidemment déterminée dès que l'on donnera deux de ses projections, puisqu'alors elle devra se trouver à l'intersection de deux cylindres connus.

326. Or, les deux projections BB'B''... et AA'A''..., par exemple, sont déterminées par des équations de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x, z) = 0, \\ f_1(y, z) = 0, \end{cases}$$

ou bien

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \varphi(y), \\ y = \psi(z), \end{cases}$$

lesquelles, dans leur généralité, représentent les deux cylindres projetants qui ont pour bases les courbes BB″ et AA″; donc la courbe sera déterminée par les équations (1) ou (2).

327. Une ligne étant déterminée quand on connaît ses projections sur deux plans coordonnés, sa projection sur le troisième doit s'ensuivre nécessairement. En effet, soient a, b, c les coordonnées d'un point quelconque de la courbe qui a pour équations

$$f(x, z) = 0 \quad \text{et} \quad f_1(y, z) = 0,$$

a et b seront les coordonnées de la projection de ce point sur le plan XY. Or, si entre ces deux équations on élimine z, il est visible que l'équation résultante

$$\lambda(x, y) = 0$$

aura pour solutions tous les couples de valeurs de x et de y, qui, conjointement avec certaines valeurs de z, vérifient les équations proposées; donc elle est satisfaite par $x = a$ et $y = b$, et, par conséquent, par les coordonnées de tous les points de la droite qui projette le point (a, b, c) sur le plan XY; c'est donc l'équation du cylindre projetant de la courbe sur ce plan.

Il résulte de là que, *quand on connaîtra les équations de deux surfaces quelconques, il suffira, pour obtenir l'équation du cylindre qui projetterait leur commune section sur un des plans coordonnés, d'éliminer entre ces équations la variable que l'on compte sur l'axe qui n'est pas dans ce plan.*

328. On conclut facilement de ce qui précède, que le moyen le plus simple de représenter une droite située dans l'espace, doit être de se donner les projections de cette droite sur deux des plans coordonnés, sur XZ et YZ par exemple, et comme on sait que ces projections sont des

lignes droites, leurs équations seront de la forme

$$(1) \qquad x = az + p$$

et

$$(2) \qquad y = bz + q.$$

Dans ces équations, p et q sont les distances de l'origine aux points où les projections de la droite donnée coupent respectivement les axes des x et des y, et a et b sont les tangentes des angles que ces projections font avec celui des z, si les coordonnées sont rectangulaires. Dans le cas où les coordonnées sont obliques, a et b représentent des rapports de sinus.

Si entre les deux équations ci-dessus on élimine z, on trouvera, pour l'équation de la projection de la droite sur le plan XY,

$$y - q = \frac{b}{a}(x - p).$$

329. Nous devons faire remarquer que les équations (1) et (2), prises dans toute leur généralité, ne représentent pas seulement les projections de la droite, mais deux plans respectivement parallèles aux y et aux x. Ils sont les *plans projetants* de la droite, et c'est parce qu'ils contiennent cette droite que leur système la détermine.

330. Enfin, si l'on veut trouver la trace d'une droite sur un des plans coordonnés, celui des xy par exemple, on se rappellera (n° 323) que l'équation $z = 0$ caractérise tous les points de ce plan. Cette condition introduite dans les équations (1) et (2), donnera $x = p$, $y = q$ pour les coordonnées du point cherché.

CHAPITRE TROISIÈME.

PROBLÈMES SUR LA LIGNE DROITE.

331. PROBLÈME I. — *Trouver les équations d'une droite assujettie à passer par deux points donnés.*

Soient x', y', z' et x'', y'', z'' les coordonnées des deux points. Les équations de la droite doivent être de la forme

$$x = az + p, \tag{1}$$

$$y = bz + q. \tag{2}$$

Or, les points (x', y', z'), (x'', y'', z'') appartenant à la droite, leurs coordonnées doivent vérifier les équations (1) et (2), et l'on a les relations

$$x' = az' + p, \tag{3}$$

$$y' = bz' + q, \tag{4}$$

$$x'' = az'' + p, \tag{5}$$

$$y'' = bz'' + q, \tag{6}$$

desquelles on pourrait tirer les valeurs des quatre constantes, pour les substituer ensuite dans les équations (1) et (2); mais on arrive d'une manière plus élégante à un résultat équivalent, en suivant la méthode du n° 41 : on trouve successivement

$$x - x' = a(z - z'),$$

$$y - y' = b(z - z'),$$

$$x' - x'' = a(z' - z''),$$

$$y' - y'' = b(z' - z''),$$

d'où

$$a = \frac{x' - x''}{z' - z''}, \quad b = \frac{y' - y''}{z' - z''},$$

et, par suite,

$$x - x' = \frac{x' - x''}{z' - z''}(z - z'),$$

$$y - y' = \frac{y' - y''}{z' - z''}(z - z').$$

Ces deux dernières équations sont celles de la droite demandée.

Remarque. — Quant aux équations

$$x - x' = a(z - z'),$$
$$y - y' = b(z - z'),$$

elles appartiennent à une droite quelconque passant par le point (x', y', z'), puisqu'elles sont satisfaites par le système $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$. Les constantes a et b restent indéterminées, par la raison qu'on peut mener une infinité de droites par un même point.

332. Problème II. — *Trouver les équations d'une droite qui passe par un point donné et qui soit parallèle à une droite donnée.*

Soient

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

les équations de la droite donnée, et soient x', y', z' les coordonnées du point; puisque la droite cherchée doit passer par ce point, ses équations pourront se mettre sous la forme

$$x - x' = a'(z - z'), \quad y - y' = b'(z - z'),$$

a' et b' étant encore inconnus.

Les droites étant parallèles, les plans projetants de ces droites et, par suite, leurs projections sur chacun des plans des xz et des yz, sont parallèles. Ainsi on a nécessairement (42)

$$a' = a, \quad b' = b,$$

ce qui conduit à

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z')$$

pour les équations de la droite demandée.

Si le point donné était l'origine, les équations de la seconde droite seraient évidemment

$$x = az, \quad y = bz.$$

333. Problème III. — *Trouver le point d'intersection de deux droites dont on connaît les équations.*

Soient

$$(1) \qquad x = az + p,$$
$$(2) \qquad y = bz + q,$$

et

$$(3) \qquad x = a'z + p',$$
$$(4) \qquad y = b'z + q'$$

les équations des deux droites.

Observons d'abord que les variables x et y prennent, en général, des valeurs très-différentes dans les systèmes (1) et (2), (3) et (4) pour une même hypothèse $z = z'$; néanmoins, si les deux droites se coupent, les coordonnées du point commun devront vérifier à la fois les deux systèmes, et, par conséquent, elles s'obtiendront en regardant x, y, z *comme des inconnues qui ont les mêmes valeurs dans ces quatre équations*. Il s'agit de les résoudre sous ce point de vue; et comme leur nombre est supérieur d'une unité à celui des inconnues, il devra exister *une équation de condition*, sans laquelle le problème sera impossible, parce qu'en effet, deux droites dans l'espace ne se rencontrent pas toujours.

Les équations (1) et (3), (2) et (4), retranchées successivement l'une de l'autre, donnent

$$0 = (a - a')z + p - p', \quad \text{d'où} \quad z = \frac{p' - p}{a - a'};$$

$$0 = (b - b')z + q - q', \quad \text{d'où} \quad z = \frac{q' - q}{b - b'}.$$

Or ces valeurs de z doivent être égales; on a donc

$$\frac{p'-p}{a-a'} = \frac{q'-q}{b-b'},$$

ou

$$(5) \qquad (p'-p)(b-b')-(q'-q)(a-a') = 0.$$

Telle est la relation qui doit exister entre les constantes pour que les droites se rencontrent.

En supposant cette relation satisfaite, on obtient les coordonnées du point d'intersection par la substitution de la valeur de z, soit dans les équations (1) et (2), soit dans les équations (3) et (4). On trouve ainsi

$$z = \frac{p'-p}{a-a'} \quad \text{ou} \quad \frac{q'-q}{b-b'},$$

$$x = \frac{ap'-pa'}{a-a'}, \quad y = \frac{bq'-qb'}{b-b'}.$$

Lorsque l'on a $a' = a$ et $b' = b$, les droites sont parallèles, l'équation de condition est vérifiée, et les valeurs de x, y, z sont infinies.

334. Problème IV. — *Connaissant les équations d'une droite, trouver les angles qu'elle forme avec les trois axes.*

Dans ce problème et dans les suivants, nous supposerons les axes rectangulaires.

Soient

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

les équations de la droite donnée.

Comme cette ligne ne rencontre pas généralement les axes, les angles dont il s'agit sont ceux que forment avec ces mêmes axes une droite OD (*fig.* 178), menée par l'origine parallèlement à la droite primitive.

Les équations de OD sont (n° 332)

$$x = az, \quad y = bz.$$

Prenons sur cette ligne une longueur arbitraire $OM' = r$, et désignons par x', y', z' les coordonnées de l'extrémité M', nous aurons, pour déterminer leurs valeurs, les trois équations

$$x' = az', \quad y' = bz', \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2;$$

nous en tirerons

$$z' = \frac{r}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad y' = \frac{br}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad x' = \frac{ar}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

Cela posé, si nous achevons le parallélipipède déterminé par les trois coordonnées du point M', et si nous désignons par α, β, γ les angles cherchés M'OX, M'OY, M'OZ, nous obtiendrons, par les triangles rectangles M'OA, M'OB, M'OC, les relations

$$\cos\alpha = \frac{OA}{OM'} = \frac{x'}{r},$$

$$\cos\beta = \frac{OB}{OM'} = \frac{y'}{r},$$

$$\cos\gamma = \frac{OC}{OM'} = \frac{z'}{r};$$

et, en y mettant les valeurs des coordonnées trouvées ci-dessus, il viendra

$$(d) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \\ \cos\beta &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \\ \cos\gamma &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}. \end{aligned} \right.$$

335. Nous ferons observer :

1°. Que ces cosinus contiennent un radical susceptible de recevoir le double signe $\pm$; mais on devra toujours l'affecter du même signe dans les trois cosinus, ce qui ne fournira que deux systèmes de valeurs répondant aux *deux*

angles supplémentaires formés par la partie OD, et par son prolongement OE *avec les demi-axes positifs*, car c'est ainsi qu'on doit mesurer les angles d'une droite avec les axes coordonnés.

2°. Que *ce radical pris positivement* se rapportera toujours aux trois angles que forme avec les axes la partie OD, qui est au-dessus du plan XY, ou qui fait un angle aigu avec OZ, puisque alors, dans les formules (d), la valeur de $\cos\gamma$ étant positive, l'angle γ doit être aigu. Il est clair que, suivant les signes de a et de b, les deux autres angles α et β seront aigus ou obtus.

336. En ajoutant les équations (d), après les avoir élevées au carré, on obtient la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

trouvée précédemment (n° 314).

337. Problème V. — *Trouver l'angle de deux droites dont on connaît les équations.*

Soient

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q,$$

et

$$x = a'z + p',$$
$$y = b'z + q'$$

les équations des deux droites.

Ces lignes ne se rencontrant pas en général, nous leur mènerons par un même point, l'origine des coordonnées, par exemple, des parallèles OD et OD', dont les équations seront (n° 333)

$$x = az,$$
$$y = bz,$$

et

$$x = a'z,$$
$$y = b'z.$$

Prenons sur ces droites $OM' = OM'' = 1$ (*fig.* 178), joignons M′ et M″, et représentons par V l'angle cherché DOD′; nous aurons, d'après un théorème connu,

$$\overline{M'M''}^2 = \overline{OM'}^2 + \overline{OM''}^2 - 2\,OM' \times OM'' \cos V.$$

Mais si l'on désigne par x', y', z' et par x'', y'', z'' les coordonnées des deux points M′ et M″, l'équation deviendra

$$\begin{aligned}(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z'-z'')^2 &= 1 + 1 - 2\cos V\\ &= 2 - 2\cos V;\end{aligned}$$

et en développant les carrés, elle se réduira à

$$(c) \qquad \cos V = x'x'' + y'y'' + z'z'',$$

puisqu'on a

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \quad \text{et} \quad x''^2 + y''^2 + z''^2 = 1.$$

Donc maintenant, tout revient à déterminer les valeurs de $x', y', z', x'', y'', z''$.

Or, le point (x', y', z') étant sur la première parallèle OD, on a les relations

$$x' = az', \quad y' = bz',$$

auxquelles on joint l'équation

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

On obtient sans peine

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}},$$

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}},$$

$$z' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

On trouve de même

$$x'' = \frac{a'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}},$$

$$y'' = \frac{b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}},$$

$$z'' = \frac{1}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (c), il vient

$$(f) \qquad \cos V = \frac{aa' + bb' + 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}.$$

Les valeurs de z' et de z'' ayant été prises positivement, il en résulte que cette formule donne l'angle formé par les parties supérieures des parallèles aux droites proposées, lequel sera aigu ou obtus, selon le signe du numérateur $aa' + bb' + 1$.

Si l'on avait besoin de calculer le sinus de l'angle V, on emploierait la relation

$$\sin V = \sqrt{1 - \cos^2 V},$$

qui conduirait ici à l'expression

$$\sin V = \frac{\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - ba')^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}.$$

338. Si l'on veut que les droites soient *perpendiculaires*, il faut et il suffit que $\cos V = 0$, ce qui entraîne la relation

$$(g) \qquad aa' + bb' + 1 = 0.$$

Cette condition ne porte pas avec elle la conséquence que les droites se coupent, elle exprime seulement que les parallèles à ces lignes forment un angle droit. C'est ce qu'on doit entendre quand on dit que deux droites dans l'espace sont perpendiculaires entre elles.

Nous ajouterons que la condition (g), rapportée aux droites OD et OD′, laisse la seconde en partie indéterminée, lors même que la première est complétement fixée par les valeurs de a et de b, puisqu'on n'a ici qu'une relation entre a' et b'; et il en doit être ainsi, parce que, dans l'espace, il existe une infinité de droites menées par le même O perpendiculairement sur OD. Il résulte de là que, quand une perpendiculaire doit être abaissée sur une droite donnée, il faut joindre à la condition précédente celle qui exprime que deux droites se coupent.

Si les droites sont parallèles, on doit avoir

$$V = 0 \quad \text{ou} \quad = 180^\circ,$$

d'où

$$\cos V = \pm 1;$$

donc

$$\pm\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1} = aa' + bb' + 1.$$

En élevant au carré et transposant, on trouve

$$(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (ab' - ba')^2 = 0.$$

Les quantités a, b, a', b' étant réelles, aucun des carrés qui composent l'équation ne peut être négatif; il faut donc qu'on ait à la fois

$$a' = a, \quad b' = b, \quad ab' = ba'.$$

Ces conditions, dont la dernière est une conséquence des deux autres, sont en effet celles qui expriment que des droites sont parallèles.

339. Lorsqu'on fait coïncider la ligne OD′ successivement avec chacun des axes, la formule générale (f) doit donner les cosinus des angles α, β, γ, formés par OD avec les trois axes. Les équations de l'axe des x sont

$$z = 0, \quad y = 0,$$

et celles de la ligne OD′ peuvent s'écrire sous la forme

$$z = \frac{1}{a'}x, \quad y = \frac{b'}{a'}x;$$

donc, pour exprimer qu'elle se confond avec l'axe des x, il faut poser

$$\frac{1}{a'} = 0, \quad \frac{b'}{a'} = 0.$$

Mais si l'on écrit (ce qui est permis)

$$\cos V = \frac{a + b\dfrac{b'}{a'} + \dfrac{1}{a'}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\sqrt{1 + \dfrac{b'^2}{a'^2} + \dfrac{1}{a'^2}}},$$

les hypothèses ci-dessus conduiront à

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

On retrouve avec la même facilité les valeurs de $\cos\beta$ et $\cos\gamma$, semblables à celles du problème IV, qui n'est alors qu'un cas particulier du suivant.

L'angle que font entre elles les deux droites OD et OD′ peut être exprimé en fonction de ceux que ces droites forment avec les axes. En effet, soient toujours (*fig.* 178) α, β, γ les angles de la première droite avec les axes des x, des y et des z, et α', β', γ' les angles de la seconde; on parviendra, comme au n° 338, à la relation

$$\cos V = x'x'' + y'y'' + z'z'';$$

mais puisque $OM' = OM'' = 1$, on aura

$$x' = \cos\alpha, \quad y' = \cos\beta, \quad z' = \cos\gamma,$$
$$x'' = \cos\alpha', \quad y'' = \cos\beta', \quad z'' = \cos\gamma',$$

et, par suite,

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

340. On pourrait, à l'aide des propositions précédentes, résoudre le problème suivant :

Abaisser d'un point donné, dans l'espace, une perpendiculaire sur une donnée, et trouver la longueur de la perpendiculaire.

En effet, soient

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

les équations de la droite donnée. Si l'on nomme x', y', z' les coordonnées du point, on a pour la droite cherchée deux équations de la forme

$$x - x' = a'(z - z'), \quad y - y' = b'(z - z'),$$

a' et b' étant les seules constantes à déterminer.

Or, puisque les deux droites doivent être perpendiculaires, on a cette première relation

$$aa' + bb' + 1 = 0;$$

d'ailleurs, pour qu'elles se coupent, il faut qu'on ait (n° 333)

$$(p' - p)(b - b') - (q' - q)(a - a') = 0,$$

ou, en mettant à la place de q' et de p' leurs valeurs $y' - bz'$, $x' - az'$,

$$(x' - az' - p)(b - b') - (y' - bz' - q)(a - a') = 0.$$

Cette équation, combinée avec

$$aa' + bb' + 1 = 0,$$

donnerait les valeurs de a' et b', qui conduiraient finalement aux équations de la droite cherchée.

Mais ces calculs, et ceux relatifs à la seconde partie de la question, ne laisseraient pas que d'être compliqués. Nous verrons bientôt une solution plus simple du problème proposé.

CHAPITRE QUATRIÈME.

DU PLAN.

341. Pour trouver l'équation du plan, nous regarderons cette surface comme *le lieu des diverses positions que prend une droite mobile, assujettie à glisser sur une droite fixe, en restant parallèle à une direction donnée.* La méthode que nous allons employer pourra s'appliquer à la recherche des équations des surfaces courbes.

Soient donc

$$(1)\qquad x = az + p,$$

$$(2)\qquad y = bz + q$$

les équations de la droite fixe qu'on nomme *directrice*; représentons la ligne à laquelle la *génératrice* doit être constamment parallèle, par

$$x = a'z, \quad y = b'z;$$

les équations de cette génératrice seront de la forme

$$(3)\qquad x = a'z + p',$$

$$(4)\qquad y = b'z + q',$$

a' et b' étant des constantes données et invariables; mais p' et q' variant d'une position de la droite mobile à une autre. Pour que cette droite rencontre la directrice, il faut qu'on ait entre leurs coefficients (nº 333) la relation

$$(5)\qquad (p' - p)(b - b') - (q' - q)(a - a') = 0.$$

Cela posé, en donnant successivement à p' des valeurs arbitraires, et en prenant les valeurs correspondantes de q', pour les substituer les unes et les autres dans (3) et (4), on

obtiendrait des équations qui conviendraient à une suite de positions particulières de la génératrice; mais si, au lieu de fixer ainsi les valeurs de p' et q', on élimine ces deux quantités entre les équations (3), (4), (5) qui doivent exister simultanément, *l'équation finale en* (x, y, z) *conviendra alors à toutes les positions de la directrice*, puisqu'elle ne renfermera plus de traces des quantités p' et q' dont les valeurs particulières pouvaient seules distinguer une génératrice d'une autre. Le résultat de l'élimination sera donc l'équation de *la surface plane*. Or, en substituant dans (5) les valeurs de p' et q' tirées de (3) et (4), on trouve

$$(x - a'z - p)(b - b') - (y - b'z - q)(a - a') = 0,$$

ou bien

$$(6)\quad (b-b')x+(a'-a)y+(ab'-ba')z+p(b'-b)+q(a-a')=0.$$

L'équation du plan est donc du premier degré. Elle renferme *généralement* les trois variables, c'est-à-dire qu'elle est de la forme

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

342. Réciproquement, *toute équation du premier degré* telle que

$$(P)\qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$

appartient à une surface plane. Pour le démontrer, cherchons d'abord la *trace* de la surface, quelle qu'elle soit, sur un des plans coordonnés, XZ par exemple (*fig.* 179); nous ferons alors

$$y = 0,$$

et nous aurons *une droite* AC représentée par

$$(7)\qquad y = 0 \quad \text{et} \quad Ax + Cz + D = 0.$$

Cela posé, coupons la surface inconnue par divers plans parallèles à XY, tels que

$$z = \alpha, \quad z = \alpha', \ldots;$$

les sections seront représentées par les équations simultanées

$$(8)\quad \begin{cases} z = \alpha \quad \text{et} \quad Ax + By + C\alpha + D = 0, \\ z = \alpha' \quad \text{et} \quad Ax + By + C\alpha' + D = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

qui prouvent que ces diverses sections sont *des droites* toutes parallèles entre elles; nous ajoutons que *chacune a un point commun avec la trace* AC; car si, d'après la règle du n° 333, on combine les équations (7) et (8) pour en éliminer y et z, on arrive aux deux équations

$$Ax + C\alpha + D = 0, \quad Ax + C\alpha + D = 0,$$

qui donnent nécessairement pour x la même valeur. Comme il en serait évidemment de même en remplaçant α par α', α'', etc., il en résulte que la surface (P) est *le lieu d'une infinité de droites parallèles, qui s'appuient toutes* sur une droite fixe AC; donc cette surface est *un plan*.

343. Lorsque l'équation d'un plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

est donnée, il est évident que sa *trace* sur le plan XY est déterminée par le système d'équations

$$z = 0, \quad Ax + By + D = 0,$$

et que les autres traces sont représentées par des systèmes semblables.

Remarque. — L'équation (P) peut n'avoir pas tous ses termes : alors le plan qu'elle détermine prend une position particulière par rapport aux axes.

Soit

$$D = 0;$$

l'équation (P) devient

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Le plan passe par l'origine; car cette équation est satisfaite

par les valeurs

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

On sait (n° 323) qu'une équation de la forme

$$By + Cz + D = 0, \quad \text{ou} \quad Cz + D = 0,$$

représente un plan parallèle à un ou à deux des axes coordonnés.

344. Nous devons faire remarquer que l'équation (P) pouvant toujours être divisée par le coefficient de l'un de ses termes, il n'y a réellement que trois indéterminées dont on puisse disposer pour assujettir le plan à des conditions données. Toutefois, nous ajouterons qu'il convient en général de conserver à l'équation du plan la forme symétrique que nous lui avons donnée pour qu'elle réponde à tous les cas particuliers. En effet, si on la divise par C, et qu'on écrive alors

$$z = mx + ny + p,$$

cette dernière forme ne convient plus aux plans parallèles à l'axe des z.

Lorsqu'un plan rencontre les trois axes, son équation prend une forme élégante, si l'on y fait entrer les distances OA, OB, OC (*fig.* 179) de l'origine aux trois points d'intersection de ces axes avec le plan. Ces distances s'obtiennent aisément au moyen de l'équation (P). Pour l'intersection avec l'axe des x par exemple, on doit avoir

$$y = 0, \quad z = 0;$$

ce qui donne

$$OA = -\frac{D}{A}.$$

On trouve de même

$$OB = -\frac{D}{B}, \quad OC = -\frac{D}{C}.$$

En désignant ces distances a, b, c, on aura

$$a=-\frac{D}{A},\quad b=-\frac{D}{B},\quad c=-\frac{D}{C},$$

d'où

$$A=-\frac{D}{a},\quad B=-\frac{D}{b},\quad C=-\frac{D}{c}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (P), il vient

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

345. Problème I.—*Faire passer un plan par trois points donnés.*

Désignons par x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; les coordonnées des trois points; l'équation générale

$$(1)\qquad Ax+By+Cz+D=0$$

devra être vérifiée en y remplaçant les variables par les coordonnées de chaque point, ce qui conduira aux relations

$$(2)\qquad Ax'+By'+Cz'+D=0,$$
$$(3)\qquad Ax''+By''+Cz''+D=0,$$
$$(4)\qquad Ax'''+By'''+Cz'''+D=0.$$

En prenant pour inconnues les rapports $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, on trouve

$$D=x'y''z'''-x'z''y'''+z'x''y'''-y'x''z'''+y'z''x'''-z'y''x''',$$
$$A=-y''z'''+z''y'''-z'y'''+y'z'''-y'z''+z'y'',$$
$$B=-x'z'''+x'z''-z'x''+x''z'''-z''x'''+z'x''',$$
$$C=-x'y''+x'y'''-x''y'''+y'x''-y'x'''+y''x'''.$$

346. Il est clair que si l'on assignait seulement un point par lequel le plan dût passer, on n'aurait que la relation (2) qui servirait alors à éliminer la constante D; et l'équation du plan prendrait la forme

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0,$$

dans laquelle il ne resterait véritablement que *deux* inconnues.

347. Problème II.—*Par un point donné, mener un plan parallèle à un plan donné.*

Soient

(1) $$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation d'un plan donné, et

(2) $$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

celle d'un plan parallèle.

Les traces des deux plans sur chacun des plans coordonnés doivent être parallèles. Les équations de ces traces sont :

$$Ax + Cz + D = 0,$$
$$A'x + C'z + D' = 0,$$

sur le plan des xz;

$$By + Cz + D = 0,$$
$$B'y + C'z + D' = 0,$$

sur le plan des yz.

Pour que les deux premières soient parallèles et que les deux dernières le soient aussi, il faut qu'on ait

$$\frac{A'}{C'} = \frac{A}{C}, \quad \frac{B'}{C'} = \frac{B}{C},$$

ou bien

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}.$$

Lorsque les plans rencontrent l'axe des z, ces conditions suffisent pour qu'ils soient parallèles; car les traces du premier plan se coupent sur l'axe des z, et sont parallèles à celles du second plan, lesquelles se coupent également sur cet axe. Or, deux angles dont les côtés sont parallèles ont toujours leurs plans parallèles.

Si les deux plans sont parallèles à l'axe des z, ce qui re-

vient à supposer $C = 0$ et $C' = 0$, la seule condition à remplir, c'est que les traces sur le plan des xy soient parallèles, ce qui conduit à

$$\frac{A'}{B'} = \frac{A}{B} \quad \text{ou} \quad \frac{A'}{A} = \frac{B'}{B}.$$

Ainsi, dans tous les cas, *pour que deux plans soient parallèles, il faut et il suffit que les coefficients des variables dans les équations de ces plans soient proportionnels.*

En supposant que ces conditions soient remplies, si l'on pose

$$\frac{A'}{A} = f,$$

on a

$$A' = Af, \quad B' = Bf, \quad C' = Cf;$$

par suite, quand on porte ces valeurs dans l'équation (2) et qu'on divise par f,

$$Ax + By + Cz + D'' = 0,$$

D'' étant égal à $\frac{D'}{f}$.

Cette dernière équation représente tous les plans parallèles à celui de l'équation (1), et elle ne diffère de celle-ci que par le terme constant D''.

Mais si le plan parallèle passe par un point dont les coordonnées soient x', y', z', on doit avoir

$$Ax' + By' + Cz' + D'' = 0;$$

et, en éliminant D'' entre cette équation et la précédente, on obtient pour le plan cherché

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0.$$

Quand le point donné est l'origine, il faut faire $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$; ce qui donne pour le plan parallèle,

$$Ax + By + Cz = 0.$$

348. Problème III. — *Faire passer un plan par un point et par une droite donnés.*

Soient x', y', z' les coordonnées du point, et

$$(1)\qquad \begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q \end{cases}$$

les équations de la droite donnée; l'équation du plan sera de la forme

$$(2)\qquad Ax + By + Cz + D = 0.$$

La condition de passer par le point donné est exprimée par

$$(3)\qquad Ax' + By' + Cz' + D = 0.$$

Celle de contenir la droite exige qu'en portant dans l'équation du plan les valeurs de x et de y tirées des équations de la droite, l'équation résultante soit vérifiée, quelle que soit la coordonnée z. Or, en substituant, on trouve

$$(Aa + Bb + C)z + Ap + Bq + D = 0;$$

et pour que cette égalité ait lieu, indépendamment de toute hypothèse faite sur z, il faut poser

$$(4)\qquad Aa + Bb + C = 0,$$

$$(5)\qquad Ap + Bq + D = 0.$$

Les conditions du problème sont donc renfermées dans les équations (3), (4), (5).

L'élimination de D entre (3) et (5) donne

$$A(x' - p) + B(y' - q) + Cz' = 0;$$

et en combinant cette équation avec l'équation (4), on trouve aisément

$$A = \frac{(y' - bz' - q)C}{b(x' - p) - a(y' - q)},$$

$$B = \frac{(x' - az' - p)C}{b(x' - p) - a(y' - q)};$$

mais, en retranchant l'équation (3) de l'équation (2), il vient

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = o.$$

Remplaçant A et B par leurs valeurs, on arrive à l'équation

$$(y' - bz' - q)(x - x') - (x' - az' - p)(y - y')$$
$$+ [b(x' - p) - a(y' - q)](z - z') = o,$$

qui est celle du plan cherché.

Remarque. — Ajoutons les équations (4) et (5); après avoir multiplié la première par z, nous aurons

$$A(az + p) + B(bz + q) + Cz + D = o.$$

Cette dernière équation, soustraite de l'équation (1), conduit à

$$A(x - az - p) + B(y - bz - q) = o.$$

En représentant par k le rapport indéterminé $\frac{B}{A}$, on obtient

$$x - az - p + k(y - bz - q) = o$$

pour l'équation de tous les plans passant par la même droite. On voit, en effet, que cette équation est satisfaite, quel que soit z, quand on y fait

$$x = az + p \quad \text{et} \quad y = bz + q.$$

349. Problème IV. — *Connaissant les équations de deux plans, trouver les projections de leur intersection.*

On a vu (n° 320) que les variables x et y ont les mêmes valeurs pour chaque point d'une ligne de l'espace que pour la projection de ce point sur le plan des xy; par conséquent, si les équations de deux plans sont

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = o,$$
$$(2) \qquad A'x + B'y + C'z + D' = o,$$

on aura la projection de leur intersection sur le plan coordonné que nous venons de nommer, en éliminant z entre

les équations (1) et (2). Le calcul donne

$$(AC' - CA')x + (BC' - CB')y + DC' - CD' = 0.$$

On trouverait de la même manière les projections sur les deux autres plans coordonnés.

Les équations des projections sont impossibles si l'on a

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'};$$

mais alors les plans sont parallèles (n° 347).

350. Problème V. — *Trouver l'intersection d'une droite et d'un plan dont on connaît les équations.*

Soient

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation du plan donné,

$$(2) \qquad \begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q \end{cases}$$

celles de la droite donnée; on obtiendra le point d'intersection demandé en cherchant les valeurs de x, y, z, qui satisfont aux équations (1) et (2). En effectuant les calculs, on trouve

$$z = -\frac{Ap + Bq + D}{Aa + Bb + C},$$

$$x = -\frac{a(Ap + Bq + D)}{Aa + Bb + C} + p,$$

$$y = -\frac{b(Ap + Bq + D)}{Aa + Bb + C} + q.$$

Ces valeurs sont infinies quand $Aa + Bb + C$ est nul et que $Ap + Bq + D$ ne l'est pas. Il en résulte que la condition de parallélisme du plan (1) et de la droite (2) est

$$Aa + Bb + C = 0.$$

Si l'on a, en même temps,

$$Ap + Bq + D = 0,$$

les valeurs de x, y, z sont indéterminées; c'est, en effet, ce qui doit arriver, puisqu'alors la droite est tout entière dans le plan (n° 348).

351. Problème VI. — *Connaissant les coordonnées de deux points, trouver leur distance.*

Soient x, y, z, et x', y', z' les coordonnées des deux points M et M' (*fig.* 180) dont on demande la distance MM'. Par chacun de ces points, menons trois plans parallèles à ceux des coordonnées : nous formons ainsi un parallélipipède qui a pour côtés contigus les différences $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ des coordonnées des points M et M'.

Cela posé, si les coordonnées sont rectangles, le parallélipipède l'est aussi; et en désignant par δ la diagonale MM', on trouve

$$\delta^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

Dans le cas où il s'agit de la distance du point M à l'origine O, il suffit d'exprimer que le point M' se confond avec ce dernier point; en posant

$$x'=0,\quad y'=0,\quad z'=0,$$

il en résulte

$$\delta^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

352. Supposons maintenant les coordonnées obliques. Nous désignerons par α, β, γ les angles AM'C, EM'C, EM'A; par a, b, c les arêtes contiguës M'C, M'A, M'E; et par δ, δ', δ'' les diagonales MM', CF et BE. La figure M'CMF étant un parallélogramme, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales; on a donc

$$\delta^2 + \delta'^2 = 2a^2 + 2\overline{\text{M}'\text{F}}^2.$$

Or le triangle AM'F donnant

$$\overline{\text{M}'\text{F}}^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\gamma,$$

il en résulte

(1) $$\delta^2 + \delta'^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 4bc\cos\gamma.$$

On trouverait de la même manière

(2) $$\delta^2 + \delta''^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 4ab\cos\alpha$$

et

(3) $$\delta'^2 + \delta''^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 4ac\cos\beta.$$

Si l'on ajoute les équations (1) et (2), et qu'on en retranche l'équation (3), il vient

$$\delta^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha + 2ac\cos\beta + 2bc\cos\gamma.$$

Remplaçant a, b, c par leurs valeurs $(x-x')$, $(y-y')$, $(z-z')$, on obtient la formule demandée

$$\begin{aligned}\delta^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + 2(x-x')(y-y')\cos\alpha \\ + 2(x-x')(z-z')\cos\beta + 2(y-y')(z-z')\cos\gamma.\end{aligned}$$

Il est visible qu'en faisant, dans cette formule,

$$\alpha = 90^\circ, \quad \beta = 90^\circ, \quad \gamma = 90^\circ,$$

on détermine celle qui convient aux coordonnées rectangulaires.

353. Problème VII. — *D'un point donné abaisser une perpendiculaire sur un plan; trouver le pied et la grandeur de la perpendiculaire* (coordonnées rectangulaires).

Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il faut et il suffit, en général, que les projections de cette droite soient perpendiculaires aux traces du plan. Cela posé, représentons par x', y', z' les coordonnées du point donné, et le plan par l'équation

(1) $$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Les équations de la perpendiculaire seront de la forme

(2) $$x - x' = a(z-z'), \quad y - y' = b(z-z'),$$

a et b étant deux inconnues. Les traces du plan donné sur

les plans des xz et des yz ont pour équations

$$Ax + Cz + D = 0, \quad By + Cz + D = 0.$$

Mais ces traces doivent être perpendiculaires aux projections de la droite cherchée; donc

$$a = \frac{A}{C}, \quad b = \frac{B}{C}.$$

Ces valeurs portées dans les équations (2) donnent, pour la perpendiculaire,

$$(3) \qquad x - x' = \frac{A}{C}(z - z'), \quad y - y' = \frac{B}{C}(z - z').$$

On trouverait les coordonnées du pied de cette perpendiculaire, en résolvant les équations (1) et (3) par rapport à x, y, z; ensuite, pour avoir la longueur de la droite, il suffirait de remplacer ces coordonnées par leurs valeurs dans la formule

$$(4) \qquad \delta = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Pour plus de simplicité, on calcule immédiatement les différences $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$. On est conduit alors à écrire l'équation du plan sous la forme

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') + Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$

ou mieux, en posant

$$Ax' + By' + Cz' + D = D',$$

sous celle-ci,

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') + D' = 0.$$

En mettant à la place de $x - x'$ et de $y - y'$ leurs valeurs tirées des équations (3), on trouve

$$z - z' = \frac{-CD'}{A^2 + B^2 + C^2},$$

et, par suite,

$$x - x' = \frac{-AD'}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad y - y' = \frac{-BD'}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Si l'on désigne la perpendiculaire par P, la formule (4) donnera

$$P = \frac{D'}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \text{ou} \quad P = \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

La valeur de P devant être essentiellement *positive,* on prendra pour le radical le signe dont le numérateur se trouvera affecté.

Lorsque le point donné est l'origine, on pose

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0,$$

et il vient

$$P = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

formule à laquelle s'applique nécessairement l'observation relative au signe.

Première remarque. — Il convient d'observer que *la distance d'un point à un plan est une fonction rationnelle entière et du premier degré des coordonnées de ce point,* quels que soient, d'ailleurs, les angles que font entre eux les axes des coordonnées.

En effet, soient (*fig.* 181) ABC un plan rapporté aux trois axes quelconques OX, OY, OZ; MP la perpendiculaire abaissée d'un point M sur ABC; MDE une parallèle à l'axe des z, rencontrant les plans ABC, XOY aux points D et E. Nommons γ l'angle MDP que le plan donné forme avec l'axe des z; x', y', z' les coordonnées du point M; P la perpendiculaire MP, et désignons par

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation du plan ABC.

Le triangle rectangle MPD donnera

$$(1) \qquad P = MD \times \sin\gamma.$$

D'ailleurs,

$$MD = \pm(ME - DE) = \pm(z' - DE).$$

Or, le point D appartenant au plan ABC, on a, entre les

coordonnées de ce point, la relation

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad \text{d'où} \quad z = -\frac{Ax + By + D}{C}.$$

Mais $z = DE$, et les coordonnées x, y du point D sont respectivement égales à x', y'; donc

$$DE = -\frac{Ax' + By' + D}{C},$$

par suite,

$$(3) \qquad P = \pm(Ax' + By' + Cz' + D) \times \frac{\sin\gamma}{C}.$$

Cette dernière égalité démontre le principe énoncé.

L'équation (3) donne

$$Ax' + By' + Cz' + D = \pm P \times \frac{C}{\sin\gamma} = P \times k,$$

en posant

$$\pm\frac{C}{\sin\gamma} = k.$$

La valeur absolue du coefficient k est indépendante de la position du point (x', y', z') dans l'espace.

De là nous concluons que *toute fonction entière du premier degré des coordonnées x', y', z' d'un point de l'espace, exprime le produit d'un coefficient numérique k, par la distance* P *du point considéré, à un plan dont l'équation s'obtient en égalant à zéro la fonction proposée.*

Seconde remarque. — Soient u, v deux fonctions entières et du premier degré, des coordonnées x, y, z d'un point de l'espace, et $f(u, v)$ une fonction quelconque de u et v : l'équation

$$f(u, v) = 0$$

représentera un cylindre dont les génératrices seront parallèles à l'intersection des deux plans $u = 0$, $v = 0$.

Désignons par p, p' les distances d'un point de la surface $f(u, v) = 0$ aux deux plans $u = 0$, $v = 0$, nous

aurons (*première remarque*)

$$u = p.k, \quad v = p'k';$$

et l'équation

$$f(u, v) = 0,$$

prenant la forme

$$f(pk, p'k') = 0,$$

ne renfermera plus que deux variables p, p'.

Cela posé, prenons pour axe des z l'intersection OZ (*fig.* 182) des deux plans $u = 0$, $v = 0$, et pour axe des x et des y les intersections OX, OY de ces deux plans et d'un troisième perpendiculaire à OZ en un point quelconque de cette droite. Le plan YOX sera perpendiculaire aux deux plans ZOX, ZOY, et l'angle rectiligne XOY sera la mesure du dièdre formé par ZOX et ZOY. Si d'un point quelconque M de la surface considérée, on abaisse sur ZOX, ZOY les perpendiculaires MP, MP', le plan de ces deux perpendiculaires coupera ZOX et ZOY, suivant des droites PD, P'E respectivement parallèles à OX, OY, et en menant MD, ME parallèles à OY, OX, on aura

$$\text{MP} = \text{MD}.\sin.\text{MDP},$$
$$\text{MP}' = \text{ME}.\sin.\text{MEP}',$$

ou, en nommant α l'angle YOX des deux plans $u = 0$, $v = 0$, et x, y les coordonnées ME, MD de M,

$$p = y.\sin\alpha,$$
$$p' = x.\sin\alpha;$$

par suite, l'équation

$$f(pk, p'k') = 0$$

deviendra

$$f(y.k\sin\alpha, xk'\sin\alpha) = 0, \tag{1}$$

et comme elle ne contient que les deux coordonnées y et x, elle représente une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à OZ. La trace de ce cylindre sur le plan YOX est déterminée par l'équation (1).

354. Problème VIII. — *Mener, par un point donné, un plan perpendiculaire à une droite donnée* (coordonnées rectangulaires).

Soient x', y', z' les coordonnées du point donné, et

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

les équations de la droite; le plan demandé passant par le point (x', y', z'), son équation sera de la forme

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0;$$

et, comme il doit être perpendiculaire à la droite donnée, on a

$$\frac{A}{C} = a, \quad \frac{B}{C} = b:$$

l'équation du plan cherché est donc

$$a(x - x') + b(y - y') + (z - z') = 0.$$

355. Problème IX. — *Mener, par un point donné, une perpendiculaire à une droite donnée; déterminer le pied et la grandeur de cette perpendiculaire* (coordonnées rectangulaires).

Soient x', y', z' les coordonnées du point donné, et

$$(1) \qquad x = az + p, \quad y = bz + q$$

les équations de la droite. Si par le point on fait passer deux plans, l'un perpendiculaire à la droite donnée, l'autre contenant cette droite, il est visible que leur intersection sera la perpendiculaire demandée; les équations de ces plans, prises ensemble, peuvent donc être regardées comme celles de cette perpendiculaire. D'après les nos 354 et 348, ces équations sont

$$(2) \qquad a(x - x') + b(y - y') + (z - z') = 0,$$

$$(3) \quad \begin{cases} (y' - bz' - q)(x - x') - (x' - az' - p)(y - y') \\ + [b(x' - p) - a(y' - q)](z - z') = 0. \end{cases}$$

On aura évidemment le pied de la perpendiculaire en résolvant les équations (1) et (2) par rapport à x, y, z. Pour trouver sa grandeur, on écrira de la manière suivante les équations de la droite donnée :

$$(4)\qquad \begin{cases} x - x' = a(z - z') + p - x' + az', \\ y - y' = b(z - z') + q - y' + bz'. \end{cases}$$

Cela posé, si l'on substitue dans l'équation (2) ces valeurs de $x - x'$ et de $y - y'$, il vient

$$(a^2 + b^2 + 1)(z - z') + a(p - x' + az') + b(q - y' + bz') = 0,$$

d'où

$$z - z' = \frac{a(x' - p) + b(y' - q) - (a^2 + b^2)z'}{a^2 + b^2 + 1}$$
$$= \frac{a(x' - p) + b(y' - q) + z'}{a^2 + b^2 + 1} - z' = \frac{\text{H}}{a^2 + b^2 + 1} - z',$$

en posant, pour simplifier,

$$\text{H} = a(x' - p) + b(y' - q) + z'.$$

Les équations (4) donnent ensuite

$$x - x' = \frac{a\text{H}}{a^2 + b^2 + 1},$$
$$y - y' = \frac{b\text{H}}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Donc, en désignant par P la distance cherchée, on aura, en remplaçant H,

$$\text{P} = \sqrt{(x' - p)^2 + (y' - q)^2 + z'^2 - \frac{[a(x' - p) + b(y' - q) + z']^2}{a^2 + b^2 + 1}}.$$

Si l'on voulait connaître les projections de la perpendiculaire, on les déduirait aisément des équations (2) et (3). Mais on les détermine aussi en observant que l'on connaît deux points de cette ligne, savoir : le point donné et le pied de la perpendiculaire.

356. Problème X. — *Connaissant l'équation d'un plan, trouver les angles qu'il fait avec les plans coordonnés* (coordonnées rectangulaires).

Soit

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation du plan. Désignons par α, β, γ les angles qu'il forme avec ceux des yz, des xz et des xy. La perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan, et qui a pour équations

$$x = \frac{A}{C}z, \quad y = \frac{B}{C}z,$$

fait évidemment les angles α, β, γ, avec les axes des x, des y et des z ; on a donc

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

On doit avoir, comme pour la droite,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Cette relation est d'ailleurs vérifiée par les valeurs précédentes.

357. Problème XI. — *Déterminer l'angle de deux plans* (coordonnées rectangulaires).

Soient

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

les équations des deux plans donnés, et V l'angle qu'ils font entre eux. Cet angle est celui des deux perpendiculaires abaissées de l'origine sur les plans. Or ces dernières ont

pour équations

$$x = \frac{A}{C}z, \quad y = \frac{B}{C}z,$$

$$x = \frac{A'}{C'}z, \quad y = \frac{B'}{C'}z;$$

et en faisant usage de la formule qui donne l'angle de deux droites, il vient, pour l'angle des plans,

$$\cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Pour que les plans soient perpendiculaires entre eux, il faut qu'on ait

$$\cos V = 0,$$

c'est-à-dire

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

Pour exprimer que les plans sont parallèles, on pose

$$\cos V = 1,$$

ce qui donne

$$AA' + BB' + CC' = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2};$$

d'où l'on déduit facilement

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

358. Problème XI. — *Trouver l'angle d'une droite et d'un plan* (coordonnées rectangulaires).

L'angle cherché est le complément de celui que fait avec la droite donnée une perpendiculaire menée au plan, d'un point quelconque de l'espace.

Soient

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation du plan,

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

celles de la droite; si la perpendiculaire est abaissée de l'origine, ses équations seront

$$x = \frac{A}{C} z, \quad y = \frac{B}{C} z.$$

Donc, en désignant par V l'angle cherché, la formule relative à l'angle de deux droites donnera

$$\sin V = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

Quand la droite donnée est parallèle au plan, on a

$$\sin V = 0 \quad \text{ou} \quad Aa + Bb + C = 0:$$

c'est la condition connue.

Lorsque la droite est perpendiculaire au plan, on a

$$\sin V = 1;$$

alors on retrouve

$$A = aC, \quad B = bC.$$

CHAPITRE CINQUIÈME.

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES RECTILIGNES.

359. *Formules pour passer à des axes parallèles.* — Supposons d'abord que les nouveaux axes soient parallèles aux anciens, et qu'ils aient la même direction. En désignant (*fig.* 183) par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M, relativement aux axes primitifs; par x', y', z' celles du même point, relativement aux nouveaux axes; si l'on appelle a, b, c les coordonnées de la nouvelle origine rapportée au premier système, on aura visiblement

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'.$$

Chaque coordonnée doit être prise avec le signe qui convient à sa position.

360. *Formules générales pour changer la direction des axes.* — Soient (*fig.* 184) OX, OY, OZ trois axes quelconques; OX', OY', OZ' trois autres axes; x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M rapporté aux premiers; x', y', z' celles du même point relativement aux derniers : on aura, dans le cas de la figure,

$$x = \mathrm{OQ}, \quad y = \mathrm{PQ}, \quad z = \mathrm{PM},$$
$$x' = \mathrm{OQ'}, \quad y' = \mathrm{P'Q'}, \quad z' = \mathrm{P'M}.$$

Par l'origine commune O, menons au plan des yz une perpendiculaire indéfinie ON, puis projetons sur cette normale les deux lignes brisées $x + y + z$ et $x' + y' + z'$. Les coordonnées y et z étant perpendiculaires à ON, leurs projections sur cette droite sont nulles, de sorte que la projection de la première ligne brisée se réduit à $x \cos(\mathrm{N}, x)$;

celle de la seconde ligne brisée est

$$x' \cos(N, x') + y' \cos(N, y') + z' \cos(N, z') \quad (312).$$

Or ces deux lignes étant terminées aux mêmes extrémités, leurs projections sont égales; donc

$$x \cos(N, x) = x' \cos(N, x') + y' \cos(N, y') + z' \cos(N, z').$$

Cette formule donne la valeur de x en fonction de x', y', z' et des angles qui fixent la position des nouveaux axes par rapport aux anciens. On trouvera de même les valeurs de y et de z, en projetant les lignes brisées $x + y + z$ et $x' + y' + z'$ sur deux perpendiculaires ON$'$ et ON$''$ menées respectivement aux plans des xz et des xy. On aura ainsi les trois formules

$$(1) \left\{ \begin{aligned} x \cos(N, x) &= x' \cos(N, x') + y' \cos(N, y') + z' \cos(N, z'), \\ y \cos(N', y) &= x' \cos(N', x') + y' \cos(N', y') + z' \cos(N', z'), \\ z \cos(N'', z) &= x' \cos(N'', x') + y' \cos(N'', y') + z' \cos(N'', z'). \end{aligned} \right.$$

Ces formules sont peu employées, parce qu'il arrive rarement que l'on ait à changer des axes obliques en d'autres axes obliques.

361. Quand les axes primitifs sont rectangulaires, les trois perpendiculaires ON, ON$'$, ON$''$ coïncident avec ces axes, de sorte que les formules qui servent à passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées obliques, sont

$$(2) \left\{ \begin{aligned} x &= x' \cos(x', x) + y' \cos(y', x) + z' \cos(z', x) \\ &= ax' + by' + cz', \\ y &= x' \cos(x', y) + y' \cos(y', y) + z' \cos(z', y) \\ &= a'x' + b'y' + c'z', \\ z &= x' \cos(x', z) + y' \cos(y', z) + z' \cos(z', z) \\ &= a''x' + b''y' + c''z'. \end{aligned} \right.$$

Les neuf constantes qui entrent dans ces équations ne

peuvent pas toutes recevoir des valeurs arbitraires. En effet, a, a', a'' par exemple, désignant les cosinus des angles que forme une même droite OX' avec trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, doivent être soumis à la condition (n° 336); il en est de même pour b, b', b'' et pour c, c', c''; par conséquent, il faut toujours joindre aux formules (2) les trois relations suivantes :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1; \end{aligned} \right.$$

ce qui ne laisse que six constantes dont on puisse disposer arbitrairement.

362. Si l'on veut *passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes rectangulaires*, on se servira des formules (2) du numéro précédent; mais il faudra exprimer que les nouveaux axes sont perpendiculaires entre eux. Pour cela, on égalera à zéro les expressions de

$$\cos(x', y'), \quad \cos(x', z'), \quad \cos(y', z')$$

en fonction des cosinus a, b, c (n° 339). En joignant ces nouvelles équations de condition aux trois qu'on a déjà, il y en aura six en tout, savoir :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, \end{aligned} \right.$$

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} ab + a'b' + a''b'' &= 0, \\ ac + a'c' + a''c'' &= 0, \\ bc + b'c' + b''c'' &= 0; \end{aligned} \right.$$

de sorte que, dans le cas actuel, il ne reste plus que trois constantes arbitraires.

363. Dans le cas de *deux systèmes rectangulaires*, on a quelquefois besoin de résoudre les formules (2) par rapport

33.

à x', y', z'; il suffit, pour cela, de les ajouter : 1° après avoir multiplié la première par a, la deuxième par a' et la troisième par a''; 2° après les avoir multipliées respectivement par b, b', b''; 3° par c, c', c''. Ces opérations donnent, en ayant égard aux relations (3) et (4), les formules

$$(5)\quad \begin{cases} x' = ax + a'y + a''z, \\ y' = bx + b'y + b''z, \\ z' = cx + c'y + c''z. \end{cases}$$

On obtiendrait directement ces formules, en regardant x', y' z' comme les coordonnées primitives, et en projetant alors x, y, z successivement sur les trois axes OX′, OY′, OZ′. Sous ce point de vue, on reconnaît qu'il doit exister entre les constantes les six relations

$$(6)\quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} aa' + bb' + cc' = 0, \\ aa'' + bb'' + cc'' = 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \end{cases}$$

qu'il faut regarder comme entièrement équivalentes aux relations (3) et (4); car alors les unes et les autres ne font qu'exprimer, dans un ordre différent, que les angles XOY, XOZ, YOZ et X′OY′, X′OZ′, Y′OZ′ sont tous droits.

364. *Formules d'Euler.*— Le changement des axes rectangulaires en d'autres axes rectangulaires, est celui dont l'emploi est le plus fréquent. Les formules qui conviennent à ce cas, et que nous avons données (nos 361 et 362), sont simples et symétriques; mais elles ont l'inconvénient de contenir *neuf* constantes a, b, c, a', b', etc., qui se trouvent liées par six équations de condition, entre lesquelles

l'élimination s'effectue péniblement pour réduire à *trois données*, comme cela doit arriver, la détermination des nouveaux axes relativement aux anciens. Nous allons faire voir qu'on peut, en effet, exprimer les neuf constantes en fonction de trois autres seulement.

Soient OX, OY, OZ les anciens axes rectangulaires, OX', OY', OZ' les nouveaux (*fig.* 185); de plus, soit OD l'intersection des deux plans XY et X'Y'. Nous désignerons par φ l'angle DOX, par ψ l'angle DOX', et par θ l'angle des plans XY et X'Y'.

Cela posé, concevons que le point O soit le centre d'une sphère rencontrant en A, B, C, A', D les lignes OX, OY, OZ, OX', OD; et formons les triangles sphériques DAA', DA'B, DA'C. Les cosinus des côtés AA', BA', CA' sont respectivement égaux à a, a', a''; d'ailleurs, en supposant les arcs et les angles évalués en degrés, on a

$$DA = \varphi,\quad DB = 90^\circ - \varphi,\quad DA' = \psi,\quad DC = 90^\circ,$$
$$A'DB = \theta,\quad A'DA = 180^\circ - \theta,\quad A'DC = 90^\circ - \theta.$$

On trouve donc, par la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique,

$$\begin{aligned} a &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta,\\ a' &= \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta,\\ a'' &= \sin\psi\sin\theta. \end{aligned}$$

Il est visible que les valeurs de b, b', b'' se déduisent des précédentes, en changeant ψ en $90^\circ + \psi$, puisqu'alors la ligne OX' va se placer sur OY'; on obtient ainsi

$$\begin{aligned} b &= -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta,\\ b' &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta,\\ b'' &= \cos\psi\sin\theta. \end{aligned}$$

Enfin, pour avoir les valeurs de c, c', c'', on remplace, dans les valeurs de a, a', a'', θ par $90^\circ + \theta$ et ψ par 90°;

en effet, par ce changement, le plan X'OD devient Z'OD, et la ligne OX' devient OZ'. On trouve ainsi

$$c = \sin\varphi \sin\theta,$$
$$c' = -\cos\varphi \sin\theta,$$
$$c'' = \cos\theta.$$

En substituant ces valeurs dans les formules (2) du n° 362, il vient

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} x &= x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) \\ &\quad - y'(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) + z'\sin\varphi\sin\theta, \\ y &= x'(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) \\ &\quad - y'(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) - z'\cos\varphi\sin\theta, \\ z &= x'\sin\psi\sin\theta + y'\cos\psi\sin\theta + z'\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Telles sont les formules d'Euler.

365. *Manière d'obtenir l'intersection d'une surface par un plan.*— Pour avoir l'intersection d'une surface par l'un des plans coordonnés, le plan des xy par exemple, il suffit de faire $z = 0$ dans l'équation de la surface. Proposons-nous maintenant de déterminer l'intersection de la surface

$$(a)\qquad F(x, y, z) = 0$$

par un plan quelconque. L'idée qui se présente naturellement, d'après ce qui vient d'être dit, c'est de rapporter cette intersection à deux axes tracés dans le plan coupant. Pour y parvenir, supposons les axes rectangulaires; déplaçons aussi l'origine, en ajoutant aux valeurs (2) les coordonnées f, g, h (n° 359), et portons ensuite ces valeurs dans l'équation (a). La surface sera rapportée aux nouveaux axes; et en faisant $z' = 0$ dans l'équation résultante, on aura l'intersection de la surface par le plan des $x'y'$, qu'on peut supposer être le plan donné.

Mais on peut faire $z' = 0$ dans les formules avant la sub-

stitution; et si, en outre, on prend l'axe des x' parallèle au plan XY, en posant $\psi = 0$, on aura

$$(9)\qquad \begin{cases} x = f + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\cos\theta, \\ y = g + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\cos\theta, \\ z = h + y'\sin\theta. \end{cases}$$

En mettant ces valeurs dans l'équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

on obtiendra l'intersection demandée, rapportée à deux axes rectangulaires situés dans le plan coupant.

On peut trouver directement les formules (9) en opérant de la manière suivante : Soit M (*fig.* 186) un point quelconque pris dans le plan Y'OX', dont la trace sur le plan XY est OX'; et soient les coordonnées

$$OQ = x, \quad PQ = y, \quad PM = z, \quad OP' = x', \quad P'M = y'.$$

Joignons P'P, et menons P'Q' parallèle à OY, et P'G parallèle à OX; l'angle GPP' est égal à XOX', et l'angle MP'P représente l'inclinaison du plan YOX' sur le plan YOX. Cela posé, si nous faisons

$$MP'P = \theta \quad \text{et} \quad XOX' = \varphi,$$

les triangles rectangles MPP', PP'G, OP'Q' donneront

$$MP = y'\sin\theta, \quad PP' = y'\cos\theta, \quad GP' = PP'\sin\varphi,$$
$$PG = PP'\cos\varphi, \quad OQ' = x'\cos\varphi, \quad P'Q' = x'\sin\varphi.$$

Comme on a

$$x = OQ' - GP', \quad y = P'Q' + GP, \quad z = MP,$$

si l'on remplace ces lignes par leurs valeurs, et si l'on ajoute les constantes f, g, h, on retrouvera les formules (9).

Remarque. — Dans le problème du n° 365, lorsque le plan sécant est donné par son équation, on commence par

calculer les angles φ et θ, ce qui est facile; car, si

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

est l'équation du plan, en faisant $z = 0$, on aura, pour celle de sa trace sur XY,

$$Ax + By + D = 0, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang} \varphi = -\frac{A}{B},$$

et, par les formules du n° 356,

$$\cos \theta = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Si le plan sécant était perpendiculaire au plan XY, l'angle θ serait droit, et les formules (9) deviendraient

$$x = f + x' \cos \varphi, \quad y = g + x' \sin \varphi, \quad z = h + y'.$$

Les formules qui servent à rapporter une surface à de nouveaux axes étant linéaires, il en résulte que le degré d'une équation algébrique à trois variables ne change point par la transformation des coordonnées. Cette remarque conduit à classer les surfaces algébriques d'après le degré de leur équation. Ainsi une surface sera du premier, du deuxième, etc., degré, suivant que l'équation qui la représentera sera elle-même du premier, du deuxième, etc., degré. On dit aussi, surface du premier, du deuxième, etc., ordre.

366. *Une surface du degré* m *ne peut pas être coupée par un plan suivant une ligne d'ordre supérieur à* m. — En effet, si l'on prend le plan sécant pour celui des xy par exemple, on obtiendra l'équation de l'intersection en faisant $z = 0$ dans celle de la surface rapportée aux nouveaux axes. Le degré de l'intersection sera donc en général égal à m. Il pourra être moindre que m dans quelques cas particuliers, car l'hypothèse $z = 0$ peut faire disparaître tous les termes du degré m. Il est même possible que tous

les termes de l'équation disparaissent : alors le plan $z = 0$ fait partie de la surface considérée, et l'équation de cette dernière se décompose en facteurs.

367. *Une surface du degré* m *ne peut être rencontrée par une droite en plus de* m *points.* — En effet, si l'on prend la droite donnée pour axe des x, et si l'on fait alors $y = 0$, $z = 0$ dans l'équation de la surface, on aura une équation qui sera au plus du degré m, et qui donnera, pour valeurs de x, les distances de l'origine aux différents points d'intersection de la surface avec la droite ; donc la proposition énoncée est vraie.

Il peut arriver que les hypothèses $y = 0$, $z = 0$ vérifient l'équation, indépendamment de toute valeur attribuée à x ; dans ce cas, la droite est tout entière sur la surface.

CHAPITRE SIXIÈME.

SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

ELLES SE DIVISENT EN DEUX CLASSES : LES UNES ONT UN CENTRE, LES AUTRES N'EN ONT PAS. COORDONNÉES DU CENTRE.

368. On nomme *centre d'une surface un point tel, que toute sécante passant par ce point a ses points de rencontre avec la surface à égale distance deux à deux du premier.*

Il résulte de cette définition que *si l'origine des coordonnées est placée au centre d'une surface quelconque, l'équation de cette surface ne doit pas changer en y remplaçant* x, y, z *par* — x, — y, — z. — En effet, considérons une sécante menée arbitrairement par le centre O (*fig.* 187), elle coupera la surface en des points qui seront deux à deux équidistants du point O. Soient M et M′ deux de ces points; menons les coordonnées MP, M′P′ parallèles à l'axe OZ; PQ, P′Q′ parallèles à l'axe OY; puis joignons OP et OP′. Les trois points P, O, P′ seront en ligne droite; par suite, les triangles MOP, M′OP′ seront égaux. Cela prouve d'abord que les coordonnées z des points M et M′ sont égales et de signes contraires, puisque OP et OP′ sont égales. Les triangles POQ, P′OQ′ sont égaux, il en résulte que les coordonnées x et y du point M sont égales et de signes contraires à celles du point M′. On voit alors que, s'il y a sur la surface un point dont les coordonnées soient x', y', z', il se trouve nécessairement sur cette surface un second point dont les coordonnées sont $-x'$, $-y'$, $-z'$. Par con-

séquent, l'équation de la surface ne doit pas changer en y remplaçant x, y, z par $-x$, $-y$, $-z$.

Réciproquement, *si l'équation de la surface n'est pas altérée, lorsqu'on y change* x, y, z *en* $-x, -y, -z$, *l'origine des coordonnées est un centre de la surface.* — En effet, les coordonnées d'un point quelconque M de la surface étant, par exemple, x', y', z', il existe un second point M′ qui a pour coordonnées $-x'$, $-y'$, $-z'$; menons MP, M′P′ parallèles à OZ; PQ, P′Q′ parallèles à OY, et traçons les droites OP, OP′, OM, OM′. Il est visible que les triangles PQO, P′Q′O sont égaux; d'où l'on conclut que $OP = OP'$ et que POP′ est une ligne droite. Alors les triangles MOP, M′OP′ étant aussi égaux, il en résulte que $OM = OM'$ et que MOM′ est une ligne droite. Donc l'origine est un centre.

Ainsi, *pour que l'origine des coordonnées soit le centre d'une surface algébrique ou transcendante, il faut et il suffit que l'équation de cette surface ne soit pas altérée, lorsqu'on y remplace* x, y, z *par* $-x, -y, -z$.

Quand l'équation proposée est algébrique, la condition que nous venons d'énoncer revient à celle-ci : *Pour que l'origine des coordonnées soit le centre d'une surface algébrique, il faut et il suffit que les termes de l'équation soient tous de degré pair, ou tous de degré impair par rapport aux variables.* Dans le second cas, il ne doit pas exister de terme indépendant.

Remarque. — L'équation est, bien entendu, préparée de manière que l'un de ses membres soit nul, et que l'autre membre soit une fonction entière des coordonnées.

369. Il résulte de ce qui précède, que le centre d'une surface algébrique de degré impair est situé sur la surface; puisqu'en y transportant l'origine, l'équation de la surface n'ayant plus de terme indépendant des variables, cette

équation sera vérifiée par les coordonnées du centre

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Le centre d'une surface de degré pair peut être situé ou non situé sur la surface.

370. Maintenant, soit

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface algébrique rapportée à des axes quelconques. Pour reconnaître si elle admet un centre, il faut transporter les axes parallèlement à eux-mêmes en un point indéterminé (x', y', z'), en mettant dans $F(x, y, z) = 0$, $x + x'$, $y + y'$, $z + z'$ à la place de x, y, z; ensuite, égaler à zéro les coefficients de tous les termes où la somme des exposants n'est pas de même parité que le degré de l'équation, et voir si l'on peut satisfaire à ces conditions par des valeurs réelles et finies des coordonnées x', y', z', qui alors donneront la nouvelle origine pour le centre demandé.

371. Appliquons ces principes aux surfaces du second degré qui sont toutes comprises dans l'équation générale

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes, en remplaçant x par $x + x'$, y par $y + y'$, z par $z + z'$, l'équation proposée deviendra

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2C_1x + 2C'_1y + 2C''_1z + E_1 = 0, \end{array} \right.$$

en faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned} C_1 &= Ax' + B'z' + B''y' + C, \\ C'_1 &= A'y' + Bz' + B''x' + C', \\ C''_1 &= A''z' + By' + B'x' + C'', \\ E_1 &= Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + 2B'x'z' \\ &\qquad 2B''x'y' + 2Cx' + 2C'y' + 2C''z' + K. \end{aligned}$$

Pour que la nouvelle origine soit un centre, il faut et il suffit (370) que l'on ait

$$C_1 = 0, \quad C'_1 = 0, \quad C''_1 = 0;$$

ce qui conduit aux équations

$$(3) \qquad \begin{cases} Ax' + B'z' + B''y' + C = 0, \\ A'y' + Bz' + B''x' + C' = 0, \\ A''z' + By' + B'x' + C'' = 0. \end{cases}$$

Ces équations, qui déterminent les coordonnées du centre, s'obtiennent évidemment en égalant à zéro les dérivées du premier membre de l'équation (1), prises par rapport à x, à y et à z, et en remplaçant ces variables par x', y', z'. En résolvant les équations (3), on a des valeurs de la forme

$$x' = \frac{N}{D}, \quad y' = \frac{N'}{D}, \quad z' = \frac{N''}{D},$$

dans lesquelles

$$\begin{aligned} D &= AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'', \\ N &= C(A'A'' - B^2) + C'(BB' - B''A'') + C''(BB'' - B'A'), \\ N' &= C'(AA'' - B'^2) + C''(B'B'' - BA) + C(BB' - B''A''), \\ N'' &= C''(AA'' - B''^2) + C(BB'' - B'A') + C'(B'B'' - BA). \end{aligned}$$

Il peut se présenter trois cas :

1°. Si le dénominateur D est différent de zéro, les valeurs de x', y', z' sont réelles et finies; par conséquent, la surface représentée par l'équation (1) admet *un centre unique;*

2°. Si le dénominateur D est nul, et que les trois numérateurs ne soient pas nuls à la fois, l'une au moins des coordonnées du centre est infinie; alors la surface représentée par l'équation (1) n'a pas de *centre;*

3°. Si le dénominateur D et les trois numérateurs N, N′, N″ sont nuls en même temps, les valeurs de x', y', z' se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$; par suite, les équations (3)

se réduisent à deux équations distinctes, ou même à une seule, et alors la surface admet *une infinité de centres.*

372. Lorsque le système (3) se réduira à deux équations distinctes, ce qui arrivera si les valeurs de x' et y', tirées des deux premières par exemple, vérifient la troisième, quel que soit z', on en conclura qu'il existe une infinité de centres, situés tous sur la droite AB (*fig.* 188) représentée par l'ensemble de ces deux mêmes premières équations; et, dans ce cas, la surface sera nécessairement *un cylindre* à base *elliptique* ou *hyperbolique.*

En effet, soit M un point quelconque de la surface représentée par l'équation (1). Joignons le point M aux différents points G, G', etc., de AB, et prolongeons les lignes en N, N', etc., de manière que

$$MG = GN, \quad MG' = G'N', \ldots;$$

les points N, N', etc., seront sur une droite parallèle à AB, et cette droite sera visiblement tout entière sur la surface dont il s'agit. En joignant de même un point quelconque N de NN' aux différents points G, G', etc., de AB et en prolongeant ces lignes de quantités égales, les points M, M', etc., ainsi déterminés, appartiendront à une seconde droite parallèle à AB et qui sera tout entière sur la surface. Il résulte de là que tout plan mené par AB coupe la surface (1) suivant deux droites parallèles à AB et qui en sont équidistantes. La surface que nous considérons est donc un cylindre dont les génératrices sont parallèles à AB. Nous ajoutons que la base de ce cylindre est une *ellipse* ou une *hyperbole;* car si l'on mène par un point quelconque G de la ligne AB un plan qui ne la contienne pas, ce plan coupera la surface suivant une courbe du second degré qui aura visiblement le point G pour centre.

373. Quand les équations (3) se réduiront à une seule,

ce qu'on reconnaîtra en voyant si la valeur de x', tirée de la première par exemple, vérifie les deux autres, quels que soient y' et z', on en conclura qu'il existe une infinité de centres situés tous dans le plan P déterminé par la première équation; et alors la surface représentée par l'équation (1) sera formée de deux plans parallèles à P. En effet, soit M (*fig.* 189) un point quelconque de la surface (1), joignons ce point aux différents points G, G′, G″, etc., du plan P, et prolongeons les droites MG, MG′, MG″, etc., de longueurs égales GN, G′N′. G″N″, etc.; les points N, N′, N″, etc., seront dans un plan S parallèle à P, et ce plan fera partie de la surface (1). En joignant de même un point quelconque N du plan S aux différents points G, G′, G″, etc., du plan P, et en prolongeant de quantités égales les droites NG, NG′, NG″, etc., les points M, M′, M″, etc., ainsi obtenus, seront sur un second plan S′ parallèle au plan P, et qui fera partie de la surface que représente l'équation (1). Nous disons de plus que cette surface n'a aucun point situé hors des plans S et S′; car, s'il en existait un, en menant par ce point une droite coupant les plans S et S′, cette droite rencontrerait la surface en trois points, sans y être contenue tout entière, ce qui est impossible. Il est donc prouvé que l'équation (1) représente deux plans parallèles à celui qui contient les centres, et à des distances égales de ce dernier.

Des plans diamétraux.

374. On nomme *plan diamétral* d'une surface un plan qui passe par les milieux d'une suite de cordes parallèles à une même direction. Nous allons faire voir que, dans une surface du second degré, il existe un plan diamétral pour chaque système de cordes parallèles; nous exposerons en même temps la marche à suivre pour trouver son équation.

Soit

$$\begin{gathered}A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' xz + 2 B'' xy \\ + 2 C x + 2 C' y + 2 C'' z + E = 0,\end{gathered}$$

ou, pour simplifier,

(1) $$F(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface du second degré. Supposons que

$$x = mz, \quad y = nz.$$

Soient les équations d'une droite, menée par l'origine, parallèlement aux cordes que nous considérons. Si l'on désigne par x', y', z' les coordonnées du milieu de cette corde, et si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes, de manière que l'origine soit en ce point milieu, l'équation de la surface deviendra

(2) $$F(x + x', \ y + y', \ z + z') = 0,$$

et celles de la corde dont il s'agit, seront

(3) $$x = mz, \quad y = nz.$$

En éliminant x et y entre les équations (2) et (3), l'équation du second degré en z

(4) $$F(mz + x', \ nz + y', \ z + z') = 0,$$

à laquelle on parvient, aura pour racines les coordonnées z des points d'intersection de la surface et de la corde, et comme ces coordonnées sont égales et de signes contraires, l'équation (4) ne doit pas contenir la première puissance de z. Alors en égalant à zéro le coefficient du terme du premier degré dans cette équation, on obtiendra une équation en x', y', z', m, n qui sera celle du lieu géométrique des milieux des cordes parallèles à la direction donnée. En faisant le calcul, qui ne présente aucune difficulté, on trouve que cette équation est

$$\begin{gathered}(Am + B' + B''n) x' + (A'n + B + B''m) y' \\ + (A'' + Bn + B'm) z' + Cm + C'n + C'' = 0,\end{gathered}$$

ou, en ôtant les accents,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &(Am + B' + B''n)x + (A'n + B + B''m)y \\ &+ (A'' + Bn + B'm)z + Cm + C'n + C'' = 0. \end{aligned}\right.$$

Les variables x, y, z étant à la première puissance, cette dernière équation représente un plan, comme on l'avait dit en commençant.

Nous devons faire remarquer que le coefficient de x est la dérivée relative à cette variable des termes du second degré qui entrent dans (1), dérivée où l'on remplacerait x, y, z par m, n et 1. Une composition semblable a lieu pour les coefficients de y et de z.

375. L'équation du plan diamétral peut être écrite de la manière suivante :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &(Ax + B'z + B''y + C)m \\ &+ (A'y + Bz + B''x + C')n \\ &+ (A''z + By + B'x + C'') = 0. \end{aligned}\right.$$

Sous cette forme on voit qu'elle est satisfaite, quels que soient m et n, quand on a en même temps

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &Ax + B'z + B''y + C = 0, \\ &A'y + Bz + B''x + C' = 0, \\ &A''z + By + B'x + C'' = 0. \end{aligned}\right.$$

Or, ces dernières équations étant celles qui déterminent les coordonnées du centre, il en résulte que, dans les surfaces douées d'un centre, tous les plans diamétraux passent par ce point. Il est facile de prouver que, réciproquement, tout plan qui passe par le centre est un plan diamétral.

Dans les surfaces dépourvues de centre, les équations (7) représentent trois plans qui se coupent en un point situé à l'infini. Lorsque deux de ces plans se rencontrent, leur intersection est parallèle au troisième; par suite, ils sont parallèles à une même droite : autrement, ils sont parallèles à un même plan.

Dans le premier cas, si l'on désigne par D la droite à laquelle les plans (7) sont parallèles, tous les plans diamétraux seront parallèles à cette droite.

En effet, les valeurs de x, y, z, qui satisfont à l'équation (6) et à deux quelconques des équations (7), sont infinies, puisque s'il n'en était pas ainsi, les équations (7) admettraient des valeurs finies pour x, y, z. Le plan (6) est donc parallèle à la droite D représentée par deux des équations (7).

Si les plans (7) sont parallèles, tous les plans (6) le sont aussi; car les coefficients des variables x, y, z sont proportionnels dans les équations (6) et (7).

Remarque. — Dans une surface quelconque

$$F(x, y, z) = 0,$$

si l'on imagine une suite de cordes toutes parallèles à une même direction, et qu'on prenne les milieux de ces lignes, le lieu géométrique de ces points formera ce qu'on appelle une *surface diamétrale*. Elle aurait plusieurs nappes, si chacune des droites parallèles avait plus de deux points communs avec la surface proposée; et comme le nombre de ces points égale, en général, le degré m de l'équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

leurs combinaisons deux à deux détermineront sur une même droite indéfinie, $\frac{m(m-1)}{2}$ cordes différentes, dont les milieux sont en même nombre. Par conséquent, le degré de la surface diamétrale aura généralement pour valeur $\frac{m(m-1)}{2}$.

Pour les surfaces du second ordre, où $m = 2$, les suraces diamétrales ne peuvent être que des plans. Cette conséquence s'accorde d'ailleurs avec ce qui précède.

Des plans principaux.

376. On nomme *plan principal* un plan diamétral qui est perpendiculaire aux cordes qu'il divise en deux parties égales; celles-ci sont appelées *cordes principales*. Nous allons démontrer que, dans toute surface du second degré, il existe au moins un plan principal.

Soit

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz \\ &+ 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0 \end{aligned}\right.$$

l'équation d'une surface du second degré, rapportée par hypothèse à des axes rectangulaires.

Soient

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} x &= mz, \\ y &= nz \end{aligned}\right.$$

les équations d'une droite quelconque. On sait que le plan diamétral correspondant a pour équation

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &(Am + B' + B''n)x + (A'n + B + B''m)y \\ &+ (A'' + Bn + B'm)z + Cm + C'n + C'' = 0. \end{aligned}\right.$$

Les conditions de perpendicularité de la droite (2) et du plan (3) sont (353)

$$\frac{Am + B' + B''n}{A'' + Bn + B'm} = m, \qquad \frac{A'n + B + B''m}{A'' + Bn + B'm} = n,$$

ou

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{Am + B' + B''n}{m} &= \frac{A'n + B + B''m}{n} \\ &= \frac{A'' + Bn + B'm}{1}; \end{aligned}\right.$$

désignant par s la valeur commune de ces rapports, on obtient

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &(A - s)m + B''n + B' = 0, \\ &B''m + (A' - s)n + B = 0, \\ &B'm + Bn + (A'' - s) = 0. \end{aligned}\right.$$

L'élimination de m et de n entre ces trois équations conduit à

$$(s-A)(s-A')(s-A'')-B^2(s-A)-B'^2(s-A') \\ -B''^2(s-A'')-2BB'B''=0;$$

ou bien, en développant,

$$(6)\left\{\begin{array}{l} s^3-(A+A'+A'')s^2+(AA'-B''^2+AA''-B'^2+A'A''-B^2)s \\ +(AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B'')=0. \end{array}\right.$$

Cette équation étant du troisième degré, admettra toujours une racine réelle, à laquelle correspondront des valeurs réelles de m et de n, qu'on saura tirer de deux quelconques des équations (5). Par conséquent, dans toute surface du second degré, il existe au moins un *plan principal*. L'équation de ce plan est

$$s(mx+ny+z)+Cm+C'n+C''=0,$$

puisque chacun des rapports (4) a pour valeur s.

L'existence d'un plan principal se trouve ainsi démontrée pour tous les cas. Toutefois, la proposition comporte des développements qui se déduiront aisément des considérations qui vont suivre. Nous devons faire remarquer immédiatement que le plan principal qui vient d'être obtenu peut être situé à une distance infinie de l'origine des coordonnées; mais ce cas n'a lieu que pour les surfaces dépourvues de centre, tous les plans diamétraux passant par ce dernier point dans les autres surfaces.

SIMPLIFICATIONS DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ PAR LA TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

Surfaces douées d'un centre.

377. Une surface du second degré douée d'un centre, quand on la rapporte à trois axes rectangulaires, est représentée par une équation de la forme

$$(3)\left\{\begin{array}{l} Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy \\ +2Cx+2C'y+zC''z+E=0. \end{array}\right.$$

On fait d'abord disparaître les termes du premier degré, en transposant les axes parallèlement à eux-mêmes au centre de la surface ou à l'un de ses centres, si elle en a une infinité. Les termes du second degré ne sont pas altérés, mais le terme indépendant change de valeur ; on a alors une équation de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + E_1 = 0. \end{array}\right.$$

Nous effectuerons une seconde simplification en prenant trois nouveaux axes rectangulaires ayant même origine que les précédents, et tels, que le nouveau plan XY coïncide avec le plan principal dont nous avons reconnu l'existence (376). Il est visible que la nouvelle équation de la surface doit être telle, que les deux valeurs de z, que l'on en déduit, soient égales et de signes contraires ; d'où il résulte que cette équation ne contiendra pas les rectangles xz et yz. Enfin, on débarrassera l'équation du troisième rectangle xy, si l'on fait tourner les axes des x et des y dans leur plan, en les laissant rectangulaires, par les formules connues

$$x = x'\cos\omega - y'\sin\omega,$$
$$y = x'\sin\omega + y'\cos\omega,$$

qui conduiront à

$$\operatorname{tang} 2\omega = \frac{2B''}{A - A'}.$$

Cette valeur étant réelle et toujours admissible, on en conclut que l'équation de la surface dont il s'agit peut être ramenée à la forme

$$(3) \qquad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H,$$

x, y, z étant des coordonnées rectangulaires. Cette équation comprend toutes les surfaces qui ont un centre ou une infinité de centres.

378. On peut reconnaître qu'il existe une infinité de sys-

tèmes d'axes obliques pour lesquels l'équation d'une surface à centre conserve la forme

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H.$$

En effet, si l'on prend trois axes quelconques passant par le centre de la surface, l'équation ne contiendra pas de termes du premier degré; de plus, si l'on fait coïncider l'axe des z avec la direction des cordes que le plan XY divise en parties égales, il est clair que les rectangles xz et yz disparaîtront. Enfin, on fera évanouir le dernier rectangle xy, par un déplacement convenable des axes des x et des y dans leur plan. Quand l'équation d'une surface à centre est ainsi réduite, les trois plans coordonnés forment un système de plans *diamétraux conjugués;* le plan qui contient deux quelconques des axes divise en deux parties égales les cordes parallèles au troisième axe, puisque chaque hypothèse faite sur x et y par exemple, donne pour z deux valeurs égales et de signes contraires.

Surfaces dépourvues de centre.

379. Reprenons l'équation générale

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ &+ 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0,\end{aligned}\right.$$

et supposons qu'elle représente une surface dépourvue de centre, rapportée à des axes rectangulaires.

On sait que tous les plans diamétraux sont parallèles à une même droite ou sont parallèles entre eux, ce dernier cas étant compris dans le premier. Or, si l'on prend pour axe des x la direction de la droite à laquelle sont parallèles les plans diamétraux de la surface dont il s'agit, l'équation de cette surface ne contiendra ni le carré x^2, ni les rectangles xy et xz. En effet, si l'on égale à zéro les dérivées du premier membre de l'équation proposée par rapport à x, y

et z, on obtiendra

$$(2) \quad \left\{\begin{array}{l} Ax + B'z + B''y + C = 0, \\ A'y + Bz + B''x + C' = 0, \\ A''z + By + B'x + C'' = 0. \end{array}\right.$$

Ces équations devant représenter trois plans parallèles à l'axe des x, chacune d'elles ne peut renfermer que les variables y et z; il faut alors que l'on ait

$$A = 0, \quad B' = 0, \quad B'' = 0.$$

L'équation de la surface est ainsi ramenée à la forme

$$(3) \quad A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0.$$

On peut ensuite faire disparaître le rectangle yz, en déplaçant dans leur plan les axes des y et des z, ces axes restant perpendiculaires. Après cette transformation, l'équation de la surface prend la forme

$$(4) \quad A'y^2 + A''z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0.$$

Enfin, si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes en un point choisi convenablement, opération facile à exécuter, on fera disparaître à la fois les termes du premier degré en y et z, et le terme indépendant des variables. L'équation qui nous occupe prendra donc, en définitive, la forme

$$P'y^2 + P''z^2 = Qx.$$

Cette équation simple, dans laquelle x, y, z désignent des coordonnées rectangulaires, renferme toutes les surfaces dépourvues de centre.

380. La forme précédente n'a pas lieu seulement pour des axes rectangulaires; elle existe aussi pour une infinité de systèmes d'axes obliques. En effet, si l'on prend l'axe des x parallèle aux plans diamétraux, quels que soient les deux autres axes, l'équation de la surface ne renfermera

pas les termes en x^2, en xy et en xz. Comme dans le cas des coordonnées rectangulaires, on fera disparaître le rectangle yz en déplaçant convenablement dans leur plan les axes des y et des z. Enfin, on transportera les nouveaux axes parallèlement à eux-mêmes pour faire évanouir les termes du premier degré en y et z avec le terme indépendant. La proposition énoncée se trouve ainsi établie.

ÉQUATIONS LES PLUS SIMPLES DE L'ELLIPSOÏDE, DES HYPERBOLOÏDES A UNE ET A DEUX NAPPES, DES PARABOLOÏDES ELLIPTIQUE ET HYPERBOLIQUE, DES CÔNES ET DES CYLINDRES DU SECOND DEGRÉ.

Discussion des surfaces douées d'un centre.

381. Les surfaces de cette classe sont toutes renfermées, comme on l'a vu, dans l'équation

$$(1) \qquad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H,$$

les coordonnées x, y, z étant rectangulaires. Elles présentent plusieurs genres distincts que nous nous proposons d'examiner. Nous supposerons d'abord qu'aucun des quatre coefficients ne soit égal à zéro, et nous regarderons H comme positif, ce qui est permis puisqu'on peut changer les signes de tous les termes de l'équation.

Ellipsoïde. — Lorsque P, P′, P″ ont le même signe, la surface représentée par l'équation (1) se nomme *ellipsoïde*. Si ces coefficients sont négatifs, l'équation (1) n'admettant aucune solution réelle, on dit qu'elle représente un *ellipsoïde imaginaire*. Supposons donc P, P′, P″ positifs. Pour obtenir les points où la surface rencontre les axes coordonnés, on égale à zéro deux des variables x, y, z, et l'on obtient

$$x = \pm\sqrt{\frac{H}{P}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{H}{P'}}, \quad z = \pm\sqrt{\frac{H}{P''}}.$$

Posons

$$\sqrt{\frac{H}{P}} = a, \quad \sqrt{\frac{H}{P'}} = b, \quad \sqrt{\frac{H}{P''}} = c,$$

et remplaçons dans (1) P, P′, P″ par leurs valeurs tirées de ces relations; nous aurons, pour l'équation de la surface,

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Les distances $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ (*fig.* 190) sont les *demi-axes* de la surface; par conséquent, les axes sont $AA' = 2a$, $BB' = 2b$, $CC' = 2c$. Les extrémités A, A′, B, B′, C, C′ de ces dernières lignes sont les sommets de l'ellipsoïde.

En faisant $z = 0$ dans l'équation (2), pour avoir la section de la surface par le plan des xy, on obtient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

équation d'une ellipse ayant pour axes $2a$ et $2b$. Les deux autres plans coordonnés coupent aussi la surface suivant des ellipses. Ces trois courbes sont dites *sections principales*. Il est évident que les plans coupants sont des plans principaux.

382. Les sections parallèles au plan XY sont données par deux équations de la forme

$$z = h, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2};$$

et l'on voit que ce sont toujours des *ellipses semblables*, puisque leurs axes, qui ont pour valeurs $2a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, $2b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, conservent entre eux un rapport constant $\frac{a}{b}$, quel que soit h. Ces ellipses devenant imaginaires quand $h > c$, il en résulte que la surface ne s'étend ni au-dessus

du point C, ni au-dessous du point C'. On arriverait aux mêmes conséquences pour les sections parallèles au plan XZ ou au plan YZ. L'ellipsoïde est donc une surface fermée dans tous les sens.

383. Lorsqu'on suppose égaux deux des axes de l'ellipsoïde, c'est-à-dire quand on écrit $a = b$ par exemple, l'équation (2) devient

$$x^2 + y^2 + \frac{a^2}{c^2} z^2 = a^2;$$

alors toutes les sections parallèles au plan XY sont des cercles qui ont leurs centres sur l'axe OZ, et qui sont définis par deux équations simultanées telles que

$$z = h, \quad x^2 + y^2 = a^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right).$$

Ainsi la surface est de révolution autour de l'axe OZ. Il est visible qu'on peut la regarder comme engendrée par l'ellipse CAC' tournant autour de son axe CC'. On peut dire aussi qu'elle est produite par un cercle de rayon variable, dont le plan reste parallèle au plan XY, et dont le centre se meut sur l'axe des z.

384. Enfin, si l'on suppose égaux les trois axes $2a$, $2b$, $2c$, l'équation de la surface se réduit à

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

équation qui exprime que la distance d'un point quelconque de la surface à l'origine est constamment égale à a. Il en résulte que la sphère est un cas particulier de l'ellipsoïde.

385. *Hyperboloïde à une nappe.* — Lorsque l'un des coefficients P, P', P'' est négatif, et que les deux autres sont positifs, la surface représentée par l'équation (1) est ce qu'on appelle un *hyperboloïde à une nappe*. Supposons que P et

P soient positifs, et que P″ soit négatif; on aura l'équation

$$Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = H.$$

En opérant comme précédemment, les points où la surface coupe les axes sont donnés par les relations

$$x = \pm\sqrt{\frac{H}{P}},\quad y = \pm\sqrt{\frac{H}{P'}},\quad z = \pm\sqrt{\frac{H}{-P''}}.$$

Posant

$$\sqrt{\frac{H}{P}} = a,\quad \sqrt{\frac{H}{P'}} = b,\quad \sqrt{\frac{H}{-P''}} = c\sqrt{-1},$$

l'équation de la surface devient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3}$$

Si l'on prend $OA = OA' = a$ (*fig.* 191) sur l'axe des x, $OB = OB' = b$ sur l'axe des y, $OC = OC' = c$ sur l'axe des z, les quatre points A, A′, B, B′ appartiendront à la surface; les droites AA′, BB′, CC′ sont les *longueurs des axes* de l'hyperboloïde. Les deux premières qui rencontrent la surface se nomment *axes réels;* la troisième est dite *axe imaginaire.* Les extrémités des axes réels sont les sommets de la surface. Chaque plan coordonné est un plan principal de la surface, et coupe cette dernière suivant une courbe appelée *section principale.* La section déterminée par le plan des xy est une ellipse ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

les deux autres sections principales sont des hyperboles représentées dans leurs plans par les équations

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

386. Les sections parallèles au plan XY sont définies par

les équations simultanées

$$z = h, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2};$$

ces courbes sont des *ellipses* toujours semblables, puisque les deux axes qui s'obtiennent en posant successivement $y = 0$, $z = 0$, conservent entre eux le même rapport, quel que soit h. Les dimensions de ces ellipses augmentent indéfiniment avec la valeur numérique de h; alors la plus petite est celle qui correspond à $z = 0$: on la nomme *ellipse de gorge;* c'est la courbe ABA'B'.

387. Il résulte de ce qui précède que la surface que nous considérons s'étend à l'infini, et n'est formée que d'une seule *nappe* continue.

388. Lorsque les deux axes réels $2a$ et $2b$ sont égaux, l'hyperboloïde est de révolution autour de l'axe imaginaire. En effet, les sections déterminées par des plans perpendiculaires à cet axe sont des cercles dont il contient les centres. On trouve l'équation de la méridienne dans le plan XZ en faisant $y = 0$ dans l'équation de la surface. On obtient l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

389. *Hyperboloïde à deux nappes.* — Lorsque deux des coefficients P, P', P'' sont négatifs, et que le troisième est positif, la surface représentée par l'équation (1) s'appelle *hyperboloïde à deux nappes.* Nous prendrons P positif, P' et P'' négatifs. La surface rencontre les axes coordonnés aux distances

$$(\alpha) \quad x = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{P}}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{-\mathrm{P}'}}, \quad z = \mp\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{-\mathrm{P}''}}.$$

Posant

$$\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{P}}} = a, \quad \sqrt{\frac{\mathrm{H}}{-\mathrm{P}'}} = b\sqrt{-1}, \quad \sqrt{\frac{\mathrm{H}}{-\mathrm{P}''}} = c\sqrt{-1},$$

l'équation de la surface devient

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Si l'on prend $OA = OA' = a$ (*fig.* 192) sur l'axe des x, $OB = OB' = b$ sur l'axe des y, $OC = OC' = c$ sur l'axe des z, les points A et A' appartiendront à la surface; les droites AA', BB', CC' sont appelées les *longueurs des axes* de l'hyperboloïde. D'après les valeurs (α), il est évident que le premier est le seul qui rencontre la surface : il est dit l'*axe réel*; les deux autres sont les *axes imaginaires*. La surface n'a que deux sommets, qui sont les extrémités A et A' de l'axe réel. Les plans coordonnés sont des plans principaux. Les plans XZ et XY rencontrent la surface suivant des hyperboles qu'on nomme *sections principales*. On aurait encore des hyperboles si les plans coupants étaient parallèles à ceux que nous venons de désigner. Pour des plans sécants parallèles à YZ, ou perpendiculaires à l'axe réel OX, on a

$$x = h, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2}{a^2} - 1;$$

ces sections sont des ellipses *semblables* entre elles, et qui croissent indéfiniment avec la valeur absolue de h; mais elles deviennent imaginaires quand $h^2 < a^2$, c'est-à-dire dans l'intervalle des deux sommets réels A et A'.

390. Il résulte de là que la surface dont il s'agit est composée de *deux nappes*, indéfinies chacune dans un sens, mais séparées par un intervalle où il n'existe aucun point de cette surface.

Quand les deux axes imaginaires $2c$ et $2b$ sont égaux, l'hyperboloïde est de révolution autour de l'axe réel, car les sections obtenues pour des plans $x = h$ perpendiculaires à cet axe, sont des cercles dont il contient les centres. L'équation de la méridienne dans le plan XZ s'obtient en faisant

$y = 0$ dans l'équation de la surface; on trouve alors

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

c'est l'hyperboloïde (AE, A'F).

391. *Cônes du second degré.* — Pour compléter la discussion des surfaces qui ont un centre unique, nous allons considérer les cas particuliers où il y a des termes nuls dans l'équation (1). Soit $H = 0$; aucun des coefficients P, P', P'' n'étant nul, l'équation (1) se réduit à

$$(1) \qquad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 0.$$

Si P, P', P'' sont de même signe, l'équation ne peut être vérifiée par d'autres valeurs réelles que $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; donc, dans ce cas, la surface se réduit à un point qui est l'origine des coordonnées. On a une variété de l'ellipsoïde. Si l'un des coefficients P, P', P'' est de signe contraire aux deux autres, l'équation dont il s'agit représentera un cône du second degré. En effet, soient

$$(2) \qquad x = mz, \quad y = nz$$

les équations d'une droite passant par l'origine; en éliminant x, y, z entre les équations (1) et (2), on obtient

$$(3) \qquad Pm^2 + P'n^2 + P'' = 0.$$

Quand cette équation est satisfaite, la droite (2) est sur la surface (1); de plus, si l'on fait varier m et n de manière que la même équation ne cesse pas d'avoir lieu, la droite (2) tournera autour de l'origine et engendrera la surface. On voit par là que l'équation (1) représente un cône du second degré, surface que l'on doit regarder comme une variété de l'hyperboloïde à une nappe ou de l'hyperboloïde à deux nappes. Il est permis de dire que c'est un hyperboloïde à une nappe dont l'ellipse de gorge se réduit à un point, ou

un hyperboloïde à deux nappes dont l'axe réel se réduit à zéro.

392. *Cylindre elliptique et hyperbolique.* — Supposons maintenant que l'un des coefficients, P'' par exemple, soit nul dans l'équation

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H;$$

nous aurons alors

$$Px^2 + P'y^2 = H.$$

Cette équation, ne renfermant que deux variables x et y, représente (322) un cylindre parallèle à l'axe des z, et dont la base est une ellipse ou une hyperbole, selon que P et P' sont de même signe ou de signes contraires. Si l'ellipse se réduit à un point, la surface se réduit à l'axe des z. Dans le cas où l'hyperbole dégénère en deux droites qui se coupent, la surface est composée de deux plans qui se rencontrent.

393. Lorsqu'on a en même temps $P' = 0$, $P'' = 0$, l'équation de la surface devient

$$Px^2 = H.$$

Cette dernière représente un système de deux plans parallèles, qui se réduisent à un seul si H est nul.

Discussion des surfaces dépourvues de centre.

394. Les surfaces dépourvues de centre sont toutes comprises, comme on l'a vu, dans l'équation

$$P'y^2 + P''z^2 = Qx, \tag{1}$$

x, y, z désignant des coordonnées rectangulaires, et le coefficient Q étant différent de zéro. Nous supposerons P' et P'' différents de zéro. On pourra rendre P' positif, s'il ne l'est pas, en changeant les signes de tous les termes. Ensuite, on regardera Q comme positif; car s'il est négatif,

il suffira de changer le sens des x positifs, ce qui se fait en remplaçant x par $-x$. Puisque P′ et Q peuvent toujours être regardés comme positifs, nous n'aurons à examiner que le cas où P″ est positif, et celui où il est négatif.

395. *Paraboloïde elliptique.* — Lorsque les trois coefficients P′, P″ et Q sont positifs, la surface que représente l'équation (1) est nommée *paraboloïde elliptique*. Cette surface ne coupe évidemment les axes qu'à l'origine des coordonnées; les plans XY et XZ sont des plans principaux; l'axe des x est dit l'*axe* du paraboloïde. Les deux paraboles AOA′, BOB′ (*fig.* 193), déterminées par les deux plans principaux, sont des *sections principales*; elles ont pour équations :

$$z = 0 \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{Q}{P'}x,$$

$$y = 0 \quad \text{et} \quad z^2 = \frac{Q}{P''}x.$$

Si l'on désigne par $2p$ et $2p'$ les paramètres de ces paraboles, on a

$$\frac{Q}{P'} = 2p, \quad \frac{Q}{P''} = 2p';$$

portant dans l'équation (1) les valeurs de P′ et P″, tirées de ces relations, elle prendra la forme

$$(2) \qquad \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = 2x.$$

Les sections parallèles au plan YZ, ou perpendiculaires à l'axe OX, sont des ellipses représentées par

$$(3) \qquad x = h \quad \text{et} \quad \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = 2h;$$

on voit que ce sont toujours des ellipses, telles que ABA′B′, *semblables* entre elles, puisque leurs axes, qui s'obtiennent en posant successivement $z = 0$, $y = 0$ dans l'équation (3),

conservent un rapport indépendant de h. Ces ellipses augmentent indéfiniment avec h, tant que cette quantité est positive; mais elles deviendraient imaginaires si h était négatif. Il résulte de là que le paraboloïde elliptique est une surface composée d'une nappe qui s'étend à l'infini dans un seul sens.

Lorsque $p = p'$, les ellipses (3) deviennent des cercles, dont les centres sont situés sur l'axe OX, et dont les plans sont perpendiculaires à cette droite; par conséquent, le paraboloïde est de révolution, et peut être engendré par l'une des demi-paraboles OA ou OB.

396. *Paraboloïde hyperbolique.* — Les coefficients P′ et Q étant positifs, si P″ est négatif, la surface que représente l'équation (1) se nomme *paraboloïde hyperbolique*. Cette surface, comme la précédente, ne coupe les axes qu'à l'origine; les plans XY et XZ sont des plans principaux; les paraboles AOA′, BOB′ (*fig.* 194) sont appelées *sections principales*. Elles ont pour équations :

$$z = 0 \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{Q}{P'} = 2px,$$

$$y = 0 \quad \text{et} \quad z^2 = \frac{Q}{-P''} = -2p'x;$$

la seconde ayant un paramètre négatif tourne sa concavité vers les x négatifs. Quand on introduit les paramètres de ces courbes dans l'équation du paraboloïde, elle devient

$$(4) \qquad \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2x.$$

Les plans parallèles à YZ coupent cette surface suivant des hyperboles représentées par

$$(5) \qquad x = h \quad \text{et} \quad \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2h.$$

Leurs axes, qu'on détermine en posant successivement

$z=0$, $y=0$, dans l'équation (5), conservent entre eux un rapport indépendant de h : ainsi, toutes ces hyperboles sont *semblables*, et elles s'agrandissent indéfiniment avec la valeur absolue de h ; mais leur position change avec le signe de cette quantité. En effet, pour une valeur positive $h = OO'$, l'équation (5) montre que l'hyperbole (FDH, F'D'H') a son axe réel O'D dirigé parallèlement à OY, et son axe imaginaire O'S vertical, tandis que pour une valeur négative $h = OO''$, l'équation (5) donne une hyperbole (IKL, I'K'L') dont l'axe réel O''K est vertical, et dont l'axe imaginaire O''N est parallèle à OY.

Quand on pose $h=0$ dans (5), on reconnaît que le plan YZ coupe le paraboloïde suivant deux droites

$$x=0, \quad y=\pm z\sqrt{\frac{p}{p'}},$$

qui sont les asymptotes communes à toutes les hyperboles précédentes projetées sur ce plan YZ.

On conclut de ce qui précède que le paraboloïde hyperbolique est une surface composée d'une seule nappe continue, qui s'étend à l'infini vers les x positifs et vers les x négatifs, mais dont la courbure présente une forme opposée dans ces deux régions.

397. Chacun des deux paraboloïdes peut être engendré par une des deux paraboles principales, BOB' (*fig.* 193 et 194) par exemple, qui se mouvrait parallèlement à elle-même, et de manière que son sommet glissât constamment sur l'autre parabole principale AOA'.

Considérons le paraboloïde elliptique où ces deux courbes ont pour équations

$$\text{AOA'}\ldots\ldots \qquad z=0 \quad \text{et} \quad y^2=2px,$$
$$\text{BOB'}\ldots\ldots \qquad y=0 \quad \text{et} \quad z^2=2p'x.$$

Lorsque la génératrice BOB' (*fig.* 193) sera venue dans

une position quelconque DE, son sommet D, dont nous représenterons les coordonnées par $OO' = \gamma$, $O'D = \delta$, se projettera en O' sur le plan XZ; et comme la courbe mobile est dans un plan parallèle à ce dernier, elle conservera en projection le même paramètre $2p'$; ses équations seront alors

$$(f) \qquad \begin{cases} y = \delta, \\ z^2 = 2p'(x - \gamma). \end{cases}$$

D'ailleurs, le sommet D étant toujours sur la directrice AOA', il faudra que ses coordonnées $x = \gamma$, $y = \delta$, $z = 0$ satisfassent aux équations de cette dernière courbe; ce qui donnera la relation

$$(g) \qquad \delta^2 = 2p\gamma.$$

Les quantités γ et δ variant d'une position à l'autre de la génératrice, il en résulte que si l'on élimine γ et δ entre les équations (f) et (g), l'équation qu'on obtiendra sera celle de la surface engendrée. Il suffit de porter dans (g) les valeurs de δ et de γ tirées des équations (f); on trouve alors

$$y^2 = 2p\,\frac{(2p'x - z^2)}{2p'} \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = 2x.$$

La surface déterminée est donc réellement un paraboloïde elliptique.

On opère d'une manière semblable pour le paraboloïde hyperbolique, en partant des deux paraboles principales qui ont pour équations

$$\text{AOA}', \quad z = 0, \quad y^2 = 2px,$$
$$\text{BOB}', \quad y = 0, \quad z^2 = -2p'x.$$

398. *Cylindre parabolique.* — Supposons que l'un des coefficients P' ou P'' soit nul dans l'équation

$$P'y^2 + P''z^2 = Qx.$$

Soit, par exemple, $P'' = 0$; l'équation se réduit à

$$(a) \qquad P'y^2 = Qx,$$

qui représente un cylindre parallèle à l'axe des z, et dont la trace sur le plan XY est une parabole; la surface dont il s'agit est donc un *cylindre parabolique.*

L'hypothèse $P' = o$, $P'' = o$ donne $x = o$, qui représente le plan YZ. La surface n'appartient plus au second degré.

Remarque importante. — Les surfaces du second ordre peuvent être distribuées en cinq genres, savoir : l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à une nappe, l'hyperboloïde à deux nappes, le paraboloïde elliptique et le paraboloïde hyperbolique.

Toutefois, la classification n'est complète qu'autant que l'on rattache à ces surfaces, comme cas particuliers, les *cônes* et les *cylindres.* Nous ajouterons qu'une équation du second degré peut aussi donner *deux plans qui se coupent, deux plans parallèles, un plan unique, une droite, un point,* et peut même offrir *des cas d'impossibilité.*

Nature des sections planes des surfaces du second degré.

399. On a vu (nº 367) que toute section plane d'une surface du second degré est une courbe du second degré. Nous nous proposons de déterminer de quel genre sont les courbes du second ordre, que l'on obtient en coupant par des plans les différentes surfaces que nous avons examinées précédemment.

Démontrons d'abord que la projection d'une courbe du second degré sur un plan est une courbe du second degré de même espèce. Soient CMD (*fig.* 195) la courbe dont il s'agit, RS son plan, RS' le plan de projection. Prenons dans le premier et dans le second plan l'intersection RX pour axe des x; puis choisissons pour axe des y, d'une part OY, perpendiculaire en un point quelconque de RX dans le plan de la courbe, de l'autre OY', projection de OY sur RS'.

Il est visible qu'un point arbitraire M ayant pour coordonnées OP et PM, sa projection M′ sera déterminée par OP et PM′; les deux points auront la même abscisse, et comme l'ordonnée $M'P = MP \cos\alpha$, α étant l'angle des plans RS et RS′, il en résulte que, pour passer de l'équation de la projection à celle de la courbe, il suffit de mettre $y\cos\alpha$ à la place de y dans la première. On voit alors que si l'équation de la projection est généralement

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + \ldots = 0,$$

celle de la courbe sera

$$A\cos^2\alpha\, y^2 + B\cos\alpha\, xy + Cx^2 + \ldots = 0.$$

Or, $B^2 - 4AC$ et $(B^2 - 4AC)\cos^2\alpha$ sont des quantités de même signe; donc la courbe et sa projection sont de même espèce.

On conclut de ce qui vient d'être dit, que, pour connaître la nature d'une courbe du second degré dans l'espace, il suffit de savoir quelle est la nature de sa projection sur un des plans coordonnés.

400. Maintenant, occupons-nous des différents genres de sections planes des surfaces du second degré.

Ellipsoïde. Prenons l'équation

$$(1) \qquad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H,$$

et coupons la surface par le plan

$$(2) \qquad z = mx + ny + k.$$

L'élimination de z entre les équations (1) et (2) conduit à

$$(3) \quad (P + P''m^2)x^2 + (P' + P''n^2)y^2 + 2P''mnxy + \ldots = 0,$$

résultat dans lequel la condition $B^2 - 4AC < 0$ se trouve remplie, puisque

$$B^2 - 4AC = -4(PP' + P'P''m^2 + PP''n^2).$$

L'équation (3) est donc celle d'une ellipse. Par consé-

quent, toutes les sections planes de l'ellipsoïde sont des ellipses.

Hyperboloïde à une nappe. — On passe de l'ellipsoïde à l'hyperboloïde à une nappe, en changeant, dans ce qui précède, P'' en $-P''$. Ici l'intersection de l'hyperboloïde

$$Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = H$$

et du plan

$$z = mx + ny + k,$$

peut être une ellipse, une parabole ou une hyperbole; car on a, en faisant le changement indiqué,

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= -4(PP' - P'P''m^2 - PP''n^2) \\ &= 4(P'P''m^2 + PP''n^2 - PP'), \end{aligned}$$

quantité qui est positive, nulle ou négative, suivant les valeurs de m et de n.

Hyperboloïde à deux nappes. — Pour passer du cas précédent à celui de l'hyperboloïde à deux nappes, il suffit de changer partout P' en $-P'$. L'équation de la surface est

$$Px^2 - P'y^2 - P''z^2 = H.$$

La nature de son intersection par le plan

$$z = mx + ny + k$$

dépendra des signes de la quantité $B^2 - 4AC$; or, on a

$$B^2 - 4AC = 4(PP' + PP''n^2 - P'P''m^2),$$

quantité qui peut être négative, nulle ou positive. Donc l'hyperboloïde à deux nappes donne pour sections toutes les courbes du second ordre.

Paraboloïde elliptique. — L'équation du paraboloïde elliptique est

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = 2x.$$

La projection sur le plan XY de l'intersection de cette sur-

face par le plan

$$z = mx + ny + k,$$

a pour équation

$$(p' + pn^2)y^2 + pm^2x^2 + 2pmnxy + \ldots = 0.$$

Comme le binôme caractéristique

$$B^2 - 4AC = -4pp'm^2,$$

il en résulte que les sections faites dans la surface sont toujours des ellipses ou des paraboles; d'ailleurs, ce dernier cas n'arrive que quand $m = 0$, c'est-à-dire quand le plan sécant est parallèle à l'axe du paraboloïde.

Paraboloïde hyperbolique. — On passe du paraboloïde elliptique au paraboloïde hyperbolique, en changeant p' en $-p'$. Si l'on combine l'équation

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2x$$

de la surface que nous considérons, avec celle du plan

$$z = mx + ny + k,$$

il viendra, pour la projection de la section,

$$(\alpha) \qquad (p' - pn^2)y^2 - pm^2x^2 - 2pmnxy + \ldots = 0.$$

Ici la quantité $B^2 - 4AC = 4pp'm^2 + pp'm^2$; donc toutes les sections planes du paraboloïde hyperbolique sont des hyperboles ou des paraboles, et ce dernier cas arrive seulement quand $m = 0$, c'est-à-dire quand le plan sécant est parallèle à l'axe de la surface. Toutefois, parmi les hyperboles, il faut comprendre le système de deux droites, et parmi les paraboles, le cas d'une seule droite.

Du cône asymptote d'un hyperboloïde.

401. On a vu que l'équation

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H,$$

dans laquelle H est positif, représente un hyperboloïde à

une ou à deux nappes, suivant que parmi les coefficients P, P′, P″, il s'en trouve *un* ou *deux* négatifs. Dans ces deux cas, l'équation

$$(1) \qquad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 0$$

représente un cône dont le sommet est à l'origine (*). Car, toute droite AM (*fig.* 196), menée de l'origine à un point M dont les coordonnées α, β, γ vérifient l'équation (1), est entièrement située sur la surface représentée par cette équation. En effet, prenons sur AM un point quelconque M′, et nommons r le rapport des distances AM′, AM. Les coordonnées de M′ seront évidemment αr, βr, γr. Or, par hypothèse,

$$P\alpha^2 + P'\beta^2 + P''\gamma^2 = 0; \quad \text{donc} \quad r^2(P\alpha^2 + P'\beta^2 + P''\gamma^2) = 0,$$

et, par conséquent, les coordonnées de M′ satisfont à l'équation (1).

402. Actuellement, supposons que l'on mène par l'origine A, un plan qui coupe le cône $Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 0$, suivant deux génératrices AX′, AY′ (*fig.* 196); l'intersection de ce plan et de l'hyperboloïde $Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H$ sera une hyperbole ayant pour asymptotes les deux génératrices AX′, AY′.

En effet, si l'on cherche l'équation de l'intersection du cône et du plan Y′AX′, en prenant pour axes de coordonnées les génératrices AX′, AY′, les formules de transformation devront réduire le trinôme $Px^2 + P'y^2 + P''z^2$ à la forme $\lambda x'y'$; puisque l'intersection dont il s'agit étant formée des deux axes AX′, AY′ doit avoir pour équation $\lambda x'y' = 0$, λ représentant un coefficient invariable. Il

(*) Si les trois coefficients P, P′, P″ avaient le même signe, l'équation (1) n'admettrait que la solution

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

s'ensuit que l'intersection de l'hyperboloïde

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H,$$

et du plan Y'AX', rapportée aux mêmes axes AX', AY', sera déterminée par l'équation $\lambda x'y' = H$, qui représente une hyperbole dont les asymptotes sont les axes de coordonnées AX', AY'.

Observons que le même raisonnement s'applique sans aucune modification aux hyperboloïdes représentés par l'équation plus générale

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + E = 0;$$

c'est-à-dire qu'on démontrera comme précédemment que l'équation homogène

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0$$

est celle d'un cône dont le sommet est à l'origine, et qui a pour génératrices les asymptotes des hyperboles déterminées en coupant l'hyperboloïde par des plans passant par son centre. Cette propriété a fait donner au cône dont il s'agit le nom de *cône asymptote*.

Il résulte évidemment de la même propriété que la surface du cône asymptote s'approche indéfiniment de celle de l'hyperboloïde, sans que ces deux surfaces puissent avoir un seul point commun. Le cône est entièrement compris dans l'intérieur de l'hyperboloïde à une nappe; et, au contraire, il enveloppe l'hyperboloïde à deux nappes. D'où il faut conclure qu'un plan tangent au cône asymptote coupe nécessairement le premier hyperboloïde, tandis qu'il ne peut avoir aucun point commun avec le second.

403. *L'intersection d'un hyperboloïde à une nappe et d'un plan tangent au cône qui lui est asymptote, se forme de deux droites parallèles à la génératrice de contact du cône, et équidistantes de cette génératrice.*

Pour le démontrer, désignons par $Y'AX'$ (*fig.* 196) le plan tangent au cône suivant la génératrice AY'; et prenons AY' pour axe des y, et pour axe des x une droite quelconque AX' menée par le centre A de la surface dans le plan tangent. L'équation de l'intersection du cône $Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 0$, et du plan $Y'AX'$, deviendra, par les formules de transformation, $\lambda x'^2 = 0$, puisque tous les points communs à ces deux surfaces appartiennent à l'axe des y, AY'. Par suite, l'intersection de l'hyperboloïde $Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H$ et du plan $Y'AX'$, rapportée aux mêmes axes AY', AX', sera donnée par l'équation $\lambda x'^2 = H$, qui représentera deux droites parallèles à l'axe AY' et situées de différents côtés de cet axe à des distances égales.

D'après cela, on voit qu'à chacune des génératrices du cône, correspondent deux génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe, parallèles à celle du cône.

404. *Les sections faites par un même plan dans un hyperboloïde et son cône asymptote sont des courbes du même genre.*

En effet, soient

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H,$$
$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 0,$$

les équations d'un hyperboloïde et du cône asymptote. En coupant ces deux surfaces par le plan

$$z = mx + ny + k,$$

les équations des projections sur le plan XY ne différeront que par le terme indépendant des variables. Il en résulte alors que ces courbes sont du même genre.

SECTIONS RECTILIGNES DE L'HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE. — ON PEUT, SUR LA SURFACE DE L'HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE, TRACER DEUX DROITES PAR CHACUN DE CES POINTS, D'OU RÉSULTENT DEUX SYSTÈMES DE GÉNÉRATRICES RECTILIGNES DE L'HYPERBOLOÏDE. — DEUX DROITES PRISES DANS UN MÊME SYSTÈME NE SE RENCONTRENT PAS, ET DEUX DROITES DE SYSTÈMES DIFFÉRENTS SE RENCONTRENT TOUJOURS. — TOUTES LES DROITES SITUÉES SUR L'HYPERBOLOÏDE ÉTANT TRANSPORTÉES AU CENTRE, PARALLÈLEMENT A ELLES-MÊMES, S'APPLIQUENT EXACTEMENT SUR LE CONE ASYMPTOTE. — TROIS DROITES D'UN MÊME SYSTÈME NE SONT JAMAIS PARALLÈLES A UN MÊME PLAN. — L'HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE PEUT ÊTRE ENGENDRÉ PAR UNE DROITE QUI SE MEUT EN S'APPUYANT SUR TROIS DROITES FIXES, NON PARALLÈLES A UN MÊME PLAN; ET RÉCIPROQUEMENT, LORSQU'UNE DROITE GLISSE SUR TROIS DROITES FIXES, NON PARALLÈLES A UN MÊME PLAN, ELLE ENGENDRE UN HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE.

405. Soit

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

l'équation d'un hyperboloïde à une nappe; on peut l'écrire de cette manière :

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2},$$

ou

$$\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

Il est visible que cette dernière équation peut être regardée comme résultant de l'élimination de γ entre les deux équations

$$(2) \qquad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\gamma\left(1+\frac{x}{a}\right), \quad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\gamma}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

ou de l'élimination de δ entre les deux équations

$$(3) \qquad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\delta\left(1-\frac{x}{a}\right), \quad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\delta}\left(1+\frac{x}{a}\right).$$

En considérant γ et δ comme deux quantités susceptibles de recevoir toutes les valeurs possibles, les équations (2) et (3) représenteront deux systèmes de droites toutes situées sur l'hyperboloïde.

Remarque. — La méthode précédente suppose qu'on a ramené l'équation de l'hyperboloïde à la forme (1). Nous allons en exposer une autre qu'on pourrait appliquer à l'équation non simplifiée.

Soit

$$(g) \qquad y = \alpha x + \beta$$

l'équation d'un plan quelconque parallèle à l'axe des z; en éliminant y entre (1) et (g), on obtient

$$(4) \qquad \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2(b^2 + a^2\alpha^2) + 2\alpha\beta a^2 x + a^2(\beta^2 - b^2)}{a^2 b^2},$$

équation qui représente la projection sur le plan XZ de l'intersection de l'hyperboloïde et du plan. Pour que cette intersection se réduise à deux droites, il faut que les valeurs de z soient du premier degré en x : le second membre doit donc être un carré, ce qui exige qu'on ait entre les indéterminées α et β, la relation

$$(b^2 + a^2\alpha^2)(\beta^2 - b^2)\, a^2 = \alpha^2\beta^2 a^4;$$

d'où l'on déduit

$$\beta = \sqrt{b^2 + a^2\alpha^2},$$

le radical emportant avec lui le double signe $\pm$. De cette manière, l'équation (4) donne effectivement deux valeurs du premier degré, et en les joignant, chacune à son tour, à l'équation (g), il vient

$$\left\{\begin{aligned} y &= \alpha x + \sqrt{b^2 + a^2\alpha^2}, \\ z &= \frac{c\left(x\sqrt{b^2 + a^2\alpha^2} + a^2\alpha\right)}{ab}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} y &= \alpha x + \sqrt{b^2 + a^2\alpha^2}, \\ z &= \frac{-c\left(x\sqrt{b^2 + a^2\alpha^2} + a^2\alpha\right)}{ab}. \end{aligned}\right.$$

Ces deux systèmes d'équations, dans lesquels α est indéterminé, correspondent aux deux systèmes de droites contenues sur la surface.

Il est visible qu'on reproduirait l'équation de l'hyperboloïde, en éliminant α entre les deux équations de l'un des systèmes.

Pour appliquer les résultats à l'ellipsoïde ou à l'hyperboloïde à deux nappes, il suffit de changer c en $c\sqrt{-1}$, ou b en $b\sqrt{-1}$; mais alors les résultats sont imaginaires; donc ces deux surfaces n'admettent aucune génératrice rectiligne, ce qui d'ailleurs est évident.

406. *Deux droites d'un même système ne sont pas dans un même plan.*

Soient

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\gamma\left(1+\frac{x}{a}\right),\quad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\gamma}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

les équations d'une droite du système (γ). En ajoutant ces équations, après avoir multiplié l'une d'elles par une indéterminée k (nº 348), on aura l'équation générale des plans qui passent par la droite dont il s'agit, savoir :

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-\gamma\left(1+\frac{x}{a}\right)+k\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)-\frac{k}{\gamma}\left(1-\frac{x}{a}\right)=0.$$

L'élimination de y et de z entre cette équation et les équations

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\gamma'\left(1+\frac{x}{a}\right),\quad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\gamma'}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

d'une seconde droite appartenant au système (γ) conduit à

$$(\gamma'-\gamma)\left(1+\frac{x}{a}\right)+k\left(\frac{1}{\gamma'}-\frac{1}{\gamma}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)=0.$$

Pour que la droite soit tout entière dans le plan, il faut que cette dernière équation soit vérifiée, indépendamment de toute hypothèse faite sur x, ce qui exige que l'on ait

centre de la surface, leurs équations se réduisent à

$$\frac{y}{b}+\frac{c}{z}=\gamma\frac{x}{a},$$

$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=-\frac{1}{\gamma}\frac{x}{a},$$

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=-\delta\frac{x}{a},$$

$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\delta}\frac{x}{a}.$$

L'élimination de γ entre les deux premières ou de δ entre les deux dernières, conduit à

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

On voit par là que :

Toutes les droites situées sur l'hyperboloïde étant transportées au centre parallèlement à elles-mêmes, s'appliquent exactement sur le cône asymptote.

On déduit de cette propriété que :

Trois droites situées sur l'hyperboloïde ne sont jamais parallèles à un même plan.

En effet, s'il en était autrement, il y aurait dans un même plan trois génératrices du cône asymptote.

409. Les sections planes des surfaces du second degré étant des courbes du second degré, il en résulte que si, par une des droites qu'on peut tracer sur l'hyperboloïde, on fait passer un plan, ce plan coupera la surface suivant une seconde droite. Les sections obtenues de cette manière sont appelées *sections rectilignes*.

On donne aussi à ces droites le nom de *génératrices rectilignes*, parce qu'elles peuvent être regardées comme représentant les diverses positions d'une droite mobile qui, dans son mouvement, engendre la surface. Pour le prouver, prenons trois génératrices quelconques A, A′, A″ du

système (γ) ; par chaque point de A, menons une droite B du système (δ), laquelle coupera les droites A′ et A″. La condition de rencontrer les droites A, A′, A″ détermine le mouvement de la droite B ; cette dernière ligne est dans le même cas que si elle se confondait successivement avec toutes les droites du second système : donc elle engendre la surface.

Réciproquement, *lorsqu'une droite glisse sur trois droites non parallèles à un même plan, elle engendre un hyperboloïde à une nappe.*

Soient A, B, C (*fig.* 197) les trois droites données ; par chacune d'elles menons deux plans respectivement parallèles aux deux autres ; ces six plans détermineront un parallélipipède dont nous prendrons le centre pour origine des coordonnées, en choisissant pour axes des parallèles respectives OX, OY, OZ aux trois droites données A, B, C.

Cela posé, en désignant par $2a$, $2b$, $2c$ les longueurs des trois arêtes contiguës du parallélipipède, les équations des trois directrices seront

$$(\mathrm{A})\qquad \begin{cases} y = -b, \\ z = c; \end{cases}$$

$$(\mathrm{B})\qquad \begin{cases} x = a, \\ z = -c; \end{cases}$$

$$(\mathrm{C})\qquad \begin{cases} x = -a, \\ y = b. \end{cases}$$

La génératrice sera représentée par

$$(\mathrm{G})\qquad \begin{cases} x = mz + p, \\ y = nz + q. \end{cases}$$

Puisque cette ligne doit rencontrer A, B, C, on a les équations de condition

$$(1)\qquad -b = nc + q,$$

$$(2)\qquad a = mc + p,$$

$$(3)\qquad \frac{-a-p}{m} = \frac{b-q}{n}.$$

Il est visible qu'en éliminant m, n, p, q entre ces trois équations et celles de la génératrice, la relation entre x, y, z, à laquelle on parviendra, sera l'équation de la surface engendrée par le mouvement de cette ligne le long des trois droites fixes.

L'élimination de p et de q donne d'abord

$$y + b = n(z - c),$$
$$x - a = m(z + c),$$
$$n(x + a) = m(y - b);$$

enfin, si l'on élimine m et n entre ces trois dernières équations, on obtient

$$(x + a)(y + b)(z + c) - (x - a)(y - b)(z - c) = 0,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$ayz + bxz + cxy + abc = 0.$$

La surface représentée par cette équation est du second degré; elle a pour centre l'origine des coordonnées : c'est un hyperboloïde à une nappe, puisque l'ellipsoïde et l'hyperboloïde à deux nappes ne peuvent évidemment admettre de génératrices rectilignes.

410. Nous devons faire remarquer que l'hyperboloïde de révolution à une nappe peut être engendré en faisant tourner autour de l'axe de révolution une quelconque des droites contenues dans la surface. Dans ce cas, l'ellipse de gorge se réduit à un cercle, et le cône asymptote est un cône droit.

Réciproquement : *Lorsqu'une droite tourne autour d'un axe fixe non situé avec elle dans un même plan, cette droite mobile engendre un hyperboloïde de révolution à une nappe.*

Nous prendrons pour axe des z l'axe de la surface; pour axes des x et des y deux droites perpendiculaires entre elles,

situées dans le plan décrit par la plus courte distance de la génératrice à l'axe. Supposons que MG soit la génératrice dans une position quelconque, et M le point où cette génératrice rencontre le plan XY. Représentons par δ la plus courte distance OM de la génératrice à l'axe; par ω l'angle variable MOX, et par α, β, γ les angles formés par la génératrice avec les axes; le troisième est constant, les deux autres sont variables.

Il est visible que les coordonnées du point M sont

$$x = \delta \cos\omega, \quad y = \delta \sin\omega, \quad z = 0.$$

Les équations d'une droite passant par ce point sont de la forme

$$x - \delta\cos\omega = az, \quad y - \delta\sin\omega = bz.$$

Or les formules du n° 334 donnant

$$a = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad b = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma},$$

il en résulte que les équations de la droite MG peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{x - \delta\cos\omega}{\cos\alpha} = \frac{y - \delta\sin\omega}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}.$$

Cela posé, on a

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

de plus, les deux droites MG, OM étant perpendiculaires, et la seconde faisant avec les axes des angles dont les cosinus sont $\cos\omega$, $\sin\omega$ et 0, on doit avoir

$$\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega = 0,$$

d'où

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\omega} = -\frac{\cos\beta}{\cos\omega} = \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}}{1} = \sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \pm\sin\gamma,$$

et

$$\cos\alpha = \pm\sin\gamma\sin\omega, \quad \cos\beta = \mp\sin\gamma\cos\omega.$$

Les équations de la génératrice sont alors

$$x = \pm \operatorname{tang}\gamma \sin\omega . z + \delta\cos\omega,$$
$$y = \mp \operatorname{tang}\gamma \cos\omega . z + \delta \sin\omega.$$

Pour éliminer le paramètre variable ω, on élève ces équations au carré, et on les ajoute; il vient dans ce cas

$$x^2 + y^2 - \operatorname{tang}^2\gamma . z^2 = \delta^2.$$

Cette équation est celle d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, dont les axes réels sont égaux à 2δ, et dont l'axe imaginaire est $\frac{2\delta}{\operatorname{tang}\gamma}$.

SECTIONS RECTILIGNES DU PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE. — ON PEUT, SUR LA SURFACE DU PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE, TRACER DEUX DROITES PAR CHACUN DE SES POINTS; D'OU RÉSULTE LA GÉNÉRATION DU PARABOLOÏDE PAR DEUX SYSTÈMES DE DROITES. — DEUX DROITES D'UN MÊME SYSTÈME NE SE RENCONTRENT PAS; MAIS DEUX DROITES DE SYSTÈMES DIFFÉRENTS SE RENCONTRENT TOUJOURS. — TOUTES LES DROITES D'UN MÊME SYSTÈME SONT PARALLÈLES A UN MÊME PLAN. — LE PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE PEUT ÊTRE ENGENDRÉ PAR LE MOUVEMENT D'UNE DROITE QUI GLISSE SUR TROIS DROITES FIXES, PARALLÈLES A UN MÊME PLAN; OU BIEN PAR UNE DROITE QUI GLISSE SUR DEUX DROITES FIXES, EN RESTANT TOUJOURS PARALLÈLE A UN PLAN DONNÉ. — RÉCIPROQUEMENT, TOUTE SURFACE RÉSULTANT DE L'UN DE CES DEUX MODES DE GÉNÉRATION EST UN PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

411. L'équation

$$(1) \qquad \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2x$$

du paraboloïde hyperbolique peut s'écrire sous la forme

$$\left(\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}}\right) = 2x;$$

on reconnaît facilement qu'elle peut être obtenue en éliminant γ entre les deux équations

$$(2) \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = 2\gamma x, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = \frac{1}{\gamma},$$

ou bien en éliminant δ entre les deux équations

$$(3) \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = \delta, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = \frac{2x}{\delta}.$$

Les quantités γ et δ étant regardées comme deux paramètres variables, les équations (2) et (3) appartiennent à deux systèmes de droites toutes situées sur le paraboloïde.

412. *Deux droites d'un même système ne sont pas dans un même plan.* — Prenons les équations

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = 2\gamma x, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = \frac{1}{\gamma},$$

qui sont celles d'une droite du système (2). On sait (n° 348) que l'équation générale des plans qui passent par cette droite est

$$\left(\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} - 2\gamma x\right) + k\left(\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} - \frac{1}{\gamma}\right) = 0.$$

L'élimination de y et de z entre cette équation et les équations

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = 2\gamma' x, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = \frac{1}{\gamma'},$$

d'une seconde droite appartenant au système (2), conduit à

$$2x\left(\gamma' - \gamma\right) + k\left(\frac{1}{\gamma'} - \frac{1}{\gamma}\right) = 0.$$

Il faut, pour que la droite soit tout entière dans le plan, que cette dernière équation ait lieu, indépendamment de toute valeur donnée à x; ce qui entraîne l'égalité $\gamma' = \gamma$. Donc deux droites du système (2) ne peuvent pas être dans un même plan.

On prouverait semblablement que deux droites du système (3) ne sont jamais dans un même plan, et qu'alors elles ne peuvent jamais se couper.

Deux droites de systèmes différents sont toujours dans un même plan. — Soient les deux droites

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = 2\gamma x, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = \frac{1}{\gamma},$$

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = \delta, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = \frac{2x}{\delta}.$$

Les plans qui passent par la droite (2) sont représentés par l'équation

$$\left(\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} - 2\gamma x\right) + k\left(\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} - \frac{1}{\gamma}\right) = 0.$$

L'élimination de y et de z entre cette équation et celles de la droite (3) donne

$$2x\left(\frac{k}{\delta} - \gamma\right) + \left(\delta - \frac{k}{\gamma}\right) = 0.$$

Cette équation est vérifiée, quel que soit x, en prenant $k = \gamma\delta$; par conséquent, les droites dont il s'agit sont dans un même plan.

413. *Par chaque point du paraboloïde, on peut tracer une droite du système* (2) *et une droite du système* (3). — En effet, si l'on désigne par x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de la surface, on obtiendra

$$\frac{y'^2}{p} - \frac{z'^2}{p'} = 2x';$$

on pourra donc déterminer une valeur de γ et une valeur de δ, telles que l'on ait

$$\frac{y'}{\sqrt{p}} + \frac{z'}{\sqrt{p'}} = 2\gamma x', \quad \frac{y'}{\sqrt{p}} - \frac{z'}{\sqrt{p'}} = \frac{1}{\gamma},$$

$$\frac{y'}{\sqrt{p}} + \frac{z'}{\sqrt{p'}} = \delta, \quad \frac{y'}{\sqrt{p}} - \frac{z'}{\sqrt{p'}} = \frac{2x'}{\delta}.$$

Les paramètres γ et δ pouvant être ainsi calculés, les équations

$$\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{p'}}=2\gamma x,\quad \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{p'}}=\frac{1}{\gamma},$$
$$\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{p'}}=\delta,\quad \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{p'}}=\frac{2x}{\delta},$$

seront celles de deux droites tracées sur la surface, et passant par le point quelconque (x', y', z').

414. D'après ce qui précède, les droites que l'on peut tracer sur le paraboloïde

$$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{p'}=2x$$

forment deux systèmes. Or, si l'on examine les secondes équations du premier, on reconnaît immédiatement que les plans projetant sur le plan des yz sont tous parallèles entre eux; par suite, que les droites dans l'espace se trouvent toutes parallèles à l'un de ces plans : donc elles sont parallèles au plan

$$\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{p'}}=0.$$

On démontrerait de la même manière que les droites du second système sont toutes parallèles au plan

$$\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{p'}}=0.$$

Maintenant, supposons que A, A', A'' soient trois droites appartenant au même système ; elles seront rencontrées par toutes celles de l'autre système. Or, le mouvement d'une droite étant complétement déterminé par la condition de s'appuyer sur trois droites fixes, il en résulte que le paraboloïde hyperbolique peut être engendré par une droite qui glisse sur trois droites fixes parallèles à un même plan.

Ainsi envisagée, cette surface devient un cas particulier de l'hyperboloïde à une nappe.

Quand on considère seulement deux droites A et A′ appartenant au même système, les droites du second système qui les rencontrent toutes deux sont, en outre, parallèles à un plan fixe. Or le mouvement d'une droite est complétement réglé par la double condition pour cette droite de couper deux droites fixes et de rester parallèle à un plan fixe; car si l'on coupe les deux lignes par une suite de plans parallèles au précédent, et si l'on joint par des droites les points de section de chaque plan, on obtiendra autant de positions de la génératrice. On conclut de ce qui précède que le paraboloïde hyperbolique peut être engendré par une droite qui glisse sur deux droites fixes, et qui reste parallèle à un plan fixe.

On donne au plan fixe le nom de *plan directeur;* les droites fixes sont appelées *directrices*, et les droites mobiles *génératrices*. De là vient qu'on emploie l'expression *génératrices rectilignes*, pour désigner les droites qui peuvent être tracées sur la surface du paraboloïde hyperbolique. On les nomme encore *sections rectilignes*, par la raison que deux droites appartenant à deux systèmes différents représentent la section du paraboloïde par un plan.

415. Démontrons les réciproques des propositions qui viennent d'être établies.

Lorsqu'une droite glisse sur trois droites fixes parallèles à un même plan, elle engendre un paraboloïde hyperbolique.

Prenons le plan XY (*fig.* 198) parallèle aux trois directrices A, A′, A″, et la première de ces droites pour l'axe OX; dirigeons l'axe OY parallèlement à A′, et enfin par le point arbitraire O, où se coupent ces axes, traçons-en un troisième OZ qui rencontre à la fois les trois directrices : dans ce cas,

ces lignes auront pour équations

$$A \text{ ou } OX \begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad A' \begin{cases} x = 0, \\ z = h, \end{cases} \quad A'' \begin{cases} y = ax, \\ z = k. \end{cases}$$

La génératrice sera représentée par

$$x = mz + p, \quad y = nz + q;$$

mais pour qu'elle rencontre les trois directrices, il faut avoir les conditions

$$q = 0, \quad mh + p = 0, \quad a(mk + p) = nk + q.$$

On voit aisément qu'on obtiendra l'équation de la surface cherchée, en éliminant m, n, p, q entre ces équations et celles de la génératrice. Le calcul donne

$$kyz + a(h - k)xz - hky = 0.$$

Dans cette équation du second degré, le polynôme D (nº 371) qui sert de dénominateur aux coordonnées du centre, se trouve évidemment nul; alors la surface ne peut être qu'un des deux paraboloïdes ou bien un cylindre. Or, le cylindre ayant ses génératrices parallèles, et aucune droite ne pouvant être tracée sur un paraboloïde elliptique, il en résulte que la surface engendrée est un paraboloïde hyperbolique.

416. *Lorsqu'une droite glisse sur deux droites fixes et reste parallèle à un plan fixe, elle engendre un paraboloïde hyperbolique.*

Soient A et A' (*fig.* 199) les deux directrices, et YOX le plan directeur. Désignons par O et D les points de rencontre de ce plan avec les lignes A et A'; menons par ces points la droite OY; conduisons par OZ ou A un plan parallèle à A', lequel coupe le plan YOX suivant la droite OX; enfin, prenons OX, OY, OZ pour axes des coordonnées.

La directrice A' rencontrant l'axe OY et étant parallèle au plan XOZ, ses équations seront

$$y = h, \quad z = ax.$$

Comme la génératrice rencontre toujours l'axe des z, et qu'elle reste parallèle au plan XY, elle sera représentée par des équations de la forme

$$x = my, \quad z = k.$$

Cette ligne rencontrant aussi la droite A', on a la condition

$$k = amh.$$

L'élimination de m et de k entre cette équation et celles de la directrice donne

$$yz = ahx.$$

Cette équation est celle d'une surface du second degré dépourvue de centre; elle représente un paraboloïde hyperbolique, puisque l'autre paraboloïde n'a pas de génératrice rectiligne.

CHAPITRE SEPTIÈME.

DE LA DISCUSSION D'UNE ÉQUATION NUMÉRIQUE DU SECOND DEGRÉ A TROIS VARIABLES.

417. Étant donnée une équation

$$f(x, y, z) = 0$$

du second degré à trois variables et à coefficients numériques, reconnaître de quelle nature est la surface que cette équation représente : telle est la question que nous allons traiter.

Il faut d'abord chercher si la surface a un centre unique, ou si elle en admet une infinité, ou bien, enfin, si elle est dépourvue de centre. A cet effet, on égale à zéro les trois dérivées du premier membre $f(x, y, z)$ de l'équation proposée; il en résulte trois équations

$$f'_{(x)} = 0, \quad f'_{(y)} = 0, \quad f'_{(z)} = 0$$

du premier degré à coefficients numériques, dont la résolution fera savoir lequel des trois cas a lieu.

§ I. — Surfaces qui ont un centre unique.

418. Supposons que la surface ait un centre unique, et commençons par l'examen du cas particulier où l'équation que l'on donne ne renferme le carré d'aucune des trois coordonnées x, y, z; elle est alors de la forme

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2By z + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0, \end{array} \right.$$

et représente évidemment une surface illimitée, puisqu'on peut donner à deux des trois coordonnées des valeurs aussi

grandes que l'on voudra, sans que la valeur de la troisième variable cesse d'être réelle. Et comme cette surface a un centre, elle ne peut être que l'un des deux hyperboloïdes ou un cône.

En transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au centre, l'équation proposée deviendra

$$(2) \qquad 2\,\mathrm{B}yz + 2\,\mathrm{B}'xz + 2\,\mathrm{B}''xy + \mathrm{E}' = 0.$$

Si E' est nul, la surface est un cône (n° 402).

Si E' est différent de zéro, la surface sera un hyperboloïde à une ou à deux nappes, dont le cône asymptote, représenté par

$$2\,\mathrm{B}yz + 2\,\mathrm{B}'xz + 2\,\mathrm{B}''xy = 0 \qquad (\text{n° } 402),$$

a pour génératrices rectilignes les axes des coordonnées.

419. Pour décider quel est celui des deux hyperboloïdes que l'équation (2) représente quand E' n'est pas nul, on observera que les génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe étant parallèles à celles du cône asymptote (n° 408), il faudra, pour que la surface considérée soit un hyperboloïde à une nappe, que l'on puisse placer sur cette surface une droite parallèle à l'un des trois axes de coordonnées, par exemple à celui des z. Cette condition est d'ailleurs suffisante, puisque l'autre hyperboloïde n'a pas de génératrice rectiligne.

Or, une parallèle à l'axe des z ayant pour équations

$$x = \alpha, \quad y = \beta,$$

il faudra, pour que cette droite appartienne à la surface

$$2\,\mathrm{B}yz + 2\,\mathrm{B}'xz + 2\,\mathrm{B}''xy + \mathrm{E}' = 0,$$

que cette dernière équation soit vérifiée par

$$x = \alpha, \quad y = \beta,$$

quelle que soit la valeur attribuée à z, ce qui donne

$$(3)\qquad 2B\beta + 2B'\alpha = 0,$$

$$(4)\qquad 2B''\alpha\beta + E' = 0;$$

d'où

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{B}{2B'B''}\times E'} = \pm B\sqrt{\frac{E'}{2BB'B''}}.$$

On voit que α sera réel ou imaginaire, suivant que $BB'B''$ et E' auront le même signe ou des signes contraires. Il sera donc nécessaire, pour que α soit réel, que le nombre des coefficients B, B', B'', de même signe que E', soit impair. Dans ce cas, l'équation proposée représentera un hyperboloïde à une nappe. Si le nombre des coefficients B, B', B'', de même signe que E', est pair, α sera imaginaire, et l'équation appartiendra à un hyperboloïde à deux nappes.

Aucun des trois coefficients B, B', B'', ne peut être nul, quand l'équation (2) représente une surface qui a un centre unique. Car, si l'on avait, par exemple, $B''=0$, l'équation (2) se réduirait à

$$2Byz + 2B'xz + E' = 0,$$

et la surface aurait une infinité de centres situés sur la droite

$$By + B'x = 0,\quad z = 0;$$

elle serait un cylindre hyperbolique.

Remarquons, en terminant cette discussion, que l'on peut, sans transporter les axes au centre de la surface, reconnaître si l'équation (1) appartient à un hyperboloïde à une nappe ou à un hyperboloïde à deux nappes. En effet, il résulte de ce qui précède que, dans le premier cas, la surface doit avoir une génératrice rectiligne parallèle à l'axe des z; ce qui exige que l'équation (1) soit vérifiée, indépendamment de toute valeur attribuée à z, lorsqu'on y remplacera y et x par β et α. On aura donc

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} B\beta + B'\alpha + C'' &= 0,\\ 2B''\alpha\beta + 2C\alpha + 2C'\beta + E &= 0.\end{aligned}\right.$$

Lorsque les équations (5) admettront une solution réelle et finie, la surface sera du genre des hyperboloïdes à une nappe; elle pourra, d'ailleurs, se réduire à un cône.

Si les équations (5) n'admettent aucune solution réelle et finie, la surface considérée est un hyperboloïde à deux nappes.

Dans le premier cas, il restera à examiner si la surface est ou non un cône. Pour le savoir, on remplacera x, y, z par les coordonnées du centre dans l'équation (1); le premier membre prendra une valeur que nous avons déjà désignée par E', et suivant que E' sera nul ou différent de zéro, la surface sera un cône ou un hyperboloïde à une nappe.

420. Actuellement, supposons que l'équation proposée renferme les carrés des coordonnées, ou du moins le carré de l'une d'elles, de z par exemple.

En transportant les axes des coordonnées parallèlement à eux-mêmes au centre de la surface, l'équation prendra la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{r} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz \\ + 2B''xy + E' = 0, \end{array}\right.$$

et le coefficient A'' de z^2 ne sera pas nul.

En résolvant l'équation (1) par rapport à z, il vient

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{r} z = -\dfrac{By + B'x}{A''} \\ \pm \dfrac{1}{A''}\sqrt{(B^2 - A'A'')y^2 + (B'^2 - AA'')x^2 + 2(BB' - A''B'')xy - A''E'}. \end{array}\right.$$

Lorsque des valeurs β, α, attribuées à y, x, rendront positive la quantité soumise au radical, l'équation (2) déterminera pour z deux valeurs réelles correspondantes, et on aura ainsi deux points de la surface situés sur une corde parallèle à l'axe des z, qui sera divisée en deux parties égales

par le plan dont l'équation est

$$z = -\frac{By + B'x}{A''}.$$

Le point du plan des xy, qui a pour coordonnées 6, α, sera donc la projection de deux points de la surface situés sur la droite projetante $y = 6$, $x = \alpha$.

Si les valeurs 6, α, données à y, x, annulent la quantité placée sous le radical, l'équation (2) déterminera pour z une seule valeur correspondante, $-\frac{B6 + B'\alpha}{A''}$. Les deux points d'intersection de la surface et de la ligne projetante $y = 6$, $x = \alpha$, se réduisent alors à un seul point situé sur le plan diamétral

$$z = -\frac{By + B'x}{A''},$$

et la droite $y = 6$, $x = \alpha$ devient tangente à la surface au point dont les coordonnées sont

$$y = 6, \quad x = \alpha, \quad z = -\frac{B6 + B'\alpha}{A''}.$$

D'après cela, on voit que l'équation

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (B^2 - A'A'')y^2 + (B'^2 - AA'')x^2 \\ + 2(BB' - A''B'')xy - A''E' = 0, \end{array} \right.$$

obtenue en égalant le radical à zéro, représente un cylindre tangent à la surface considérée suivant une ligne située dans le plan diamétral

$$z = -\frac{By + B'x}{A''},$$

et dont la projection sur le plan des xy est déterminée par la même équation (3). Il est clair que cette conclusion suppose que l'équation dont il s'agit représente une courbe réelle.

On sait, d'ailleurs, qu'une courbe du second degré est de

même espèce que sa projection (nº 399); donc l'intersection du plan diamétral

$$z = -\frac{By + B'x}{A''}$$

et de la surface considérée sera une ellipse ou une hyperbole, suivant que l'équation (3) appartiendra à l'une ou à l'autre de ces deux courbes.

Lorsque les valeurs 6, α de y, x, rendent négative la quantité placée sous le radical, z est imaginaire, et la droite $y = 6$, $x = \alpha$ ne rencontre plus la surface; alors le point du plan des xy, qui a 6, α pour coordonnées, n'est la projection d'aucun point de la surface, en prenant pour lignes projetantes des parallèles à l'axe des z.

421. La courbe déterminée par l'équation (3) sépare la partie du plan des xy, sur laquelle se projette la surface considérée de celle qui ne reçoit la projection d'aucun point de cette surface. C'est ce qui résulte de la proposition suivante :

Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe du second degré; si l'on remplace successivement les variables x, y par les coordonnées α, 6; α', $6'$, de deux points, l'un intérieur, l'autre extérieur à la courbe, le premier membre $f(x, y)$ de l'équation prendra des valeurs $f(\alpha, 6)$, $f(\alpha', 6')$, de signes contraires; et, lorsque les deux points seront l'un et l'autre intérieurs ou extérieurs, les valeurs de $f(\alpha, 6)$, $f(\alpha', 6')$ auront le même signe.

En effet, désignons par

$$y = ax + b$$

l'équation de la droite qui unit les deux points donnés; les abscisses des points communs à cette droite et à la courbe seront déterminées par l'équation

$$f(x, ax + b) = 0.$$

Lorsque les deux points sont, l'un intérieur, l'autre extérieur à la courbe, l'équation $f(x, ax+b) = 0$ a nécessairement une racine comprise entre α et α'; donc, $f(\alpha, a\alpha+b)$, $f(\alpha', a\alpha'+b)$ ont des signes contraires. Si les points sont tous deux intérieurs ou extérieurs, l'équation $f(x, ax+b) = 0$ n'a aucune racine comprise entre α et α', ou elle en a deux : par conséquent, $f(\alpha, a\alpha+b)$, $f(\alpha', a\alpha'+b)$ ont le même signe. Mais

$$f(\alpha, a\alpha+b) = f(\alpha, 6) \quad \text{et} \quad f(\alpha', a\alpha'+b) = f(\alpha', 6');$$

la proposition est donc démontrée.

De cette proposition nous concluons que si les coordonnées d'un point intérieur à la courbe représentée par l'équation (3) rendent positive la quantité placée sous le radical de l'équation (2) (n° 420), il en sera de même pour tous les autres points intérieurs, et alors les coordonnées de tout point extérieur feront prendre le signe *moins* à cette quantité, ou inversement. Par conséquent, la courbe dont il s'agit, sépare la partie du plan des xy, qui est recouverte par la projection de la surface, de celle qui ne reçoit la projection d'aucun de ses points.

422. Au moyen des considérations qui précèdent, il sera facile de reconnaître de quelle nature est la surface que l'équation (2) détermine.

Plusieurs cas sont à distinguer : l'équation (3) peut représenter une ellipse, une hyperbole, deux droites qui se coupent à l'origine des coordonnées, un point coïncidant avec l'origine, une ligne imaginaire. Nous allons successivement examiner ces différentes hypothèses.

1°. Lorsque l'équation (3) est celle d'une ellipse, la surface étant coupée suivant une ellipse par un plan $z = -\dfrac{By + B'x}{A''}$ qui passe par son centre (page 568) ne peut être ni un hyperboloïde à deux nappes, ni un cône;

elle sera donc un ellipsoïde, ou un hyperboloïde à une nappe. Pour reconnaître lequel de ces deux cas a lieu, il suffit de savoir si la surface que l'on considère est ou non limitée.

A cet effet, on remplacera x et y, sous le radical de l'équation (2), par les coordonnées du centre de l'ellipse (3). Si les valeurs de z sont réelles, on en peut conclure que la surface est limitée; car, pour les coordonnées de tout point extérieur à l'ellipse, le radical deviendra imaginaire; par conséquent, les valeurs de x, y, et par suite, celles de z, sont limitées.

Le contraire aura lieu lorsque les valeurs de z correspondantes aux coordonnées du centre seront imaginaires.

Le centre de l'ellipse coïncidant avec l'origine, ses coordonnées sont nulles; le radical se réduit donc à $\sqrt{-A''E'}$ par la substitution dont il s'agit : par conséquent, la surface sera un ellipsoïde, ou un hyperboloïde à une nappe, suivant que le coefficient A'' de z^2, et le terme E' indépendant des variables, auront des signes contraires ou le même signe.

2°. Supposons que l'équation (3) représente une hyperbole. Le plan $z = -\frac{By + B'x}{A''}$, mené par le centre de la surface, la coupera suivant une hyperbole; donc, la surface ne peut être que l'un des hyperboloïdes. Pour distinguer entre les deux hyperboloïdes celui que l'équation (2) représente, on remplacera dans cette équation, les variables x, y, par les coordonnées du centre de l'hyperbole (3).

Si les valeurs correspondantes de z sont réelles, il en faut conclure que la surface couvre de sa projection toute la partie du plan des xy, comprise entre les deux branches de l'hyperbole, du côté du centre de cette courbe : la forme même de cette projection montre que la surface projetée n'a qu'une seule nappe continue; elle est donc un hyperboloïde à une nappe.

Si les valeurs de z sont imaginaires, la surface se projette entièrement dans l'intérieur de l'hyperbole, du côté opposé au centre : la portion du plan des xy, recouverte de la projection, se subdivise alors en deux parties séparées l'une de l'autre par l'intervalle des deux branches de la courbe ; ce qui montre que la surface projetée se compose elle-même de deux parties séparées dans l'espace ; elle est, par conséquent, un hyperboloïde à deux nappes.

Les coordonnées du centre de l'hyperbole étant nulles, les valeurs de z, correspondantes à ces coordonnées, sont

$$z = \pm\sqrt{-A''E'}.$$

Ainsi, la surface considérée sera un hyperboloïde à une ou à deux nappes, suivant que les coefficients A'', E' auront des signes contraires ou le même signe.

3°. L'équation (3) représente deux droites qui se rencontrent à l'origine. Alors, la surface est nécessairement un cône, puisque le plan $z = -\frac{By + B'x}{A''}$ la coupe suivant deux droites qui passent par son centre.

4°. Si l'équation (3) est vérifiée par les coordonnées de l'origine, et seulement par ces coordonnées, la quantité placée sous le radical de l'équation (2) conservera le même signe pour toutes les valeurs de x et de y ; elle sera composée de deux carrés, précédés chacun du signe *plus* ou du signe *moins* : il suffira de donner à x et y des valeurs quelconques, pour distinguer ces deux cas l'un de l'autre. Dans le premier, la valeur de z, constamment réelle, se réduit à zéro avec x et y. On a donc une surface illimitée sur laquelle se trouve le centre même de la surface ; c'est dire que la surface est un cône.

Dans le second, l'équation (2) n'admettant que la seule solution $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, représente l'origine des coordonnées.

5°. Enfin, quand l'équation (3) n'a aucune solution réelle, la quantité soumise au radical ne peut changer de signe: si elle est négative, l'équation (2) ne représente rien; si, au contraire, cette quantité est positive, l'équation (2) appartiendra à un hyperboloïde à deux nappes, puisque la surface qu'elle détermine n'a aucun point commun avec un plan $y = -\frac{By + B'x}{A''}$ mené par son centre.

423. *Remarque.* — Si l'on transporte les axes des coordonnées parallèlement à eux-mêmes en un point quelconque de l'espace, le plan des xy restera parallèle à sa première position, les lignes projetantes des différents points de la surface ne changeront pas, de sorte que les projections sur les plans des xy seront les mêmes. Le centre de la surface et celui de la courbe obtenue en projection, sur le plan des xy, appartiendront à une droite parallèle à l'axe des z; ces deux points auront donc les deux coordonnées x, y, communes. Par conséquent, la discussion précédente sera encore applicable, avec cette seule modification, qu'au lieu de remplacer x, y par zéro, sous le radical de la valeur de z, on substituera à x, y, les valeurs α, β, obtenues pour les coordonnées x, y du centre de la surface.

Ainsi, pour discuter l'équation proposée, il n'est pas indispensable de transporter l'origine au centre de la surface; on pourra résoudre cette équation par rapport à z (en supposant que le carré de z entre dans l'équation); il en résultera une expression de la forme

$$(1) \quad z = mx + ny + p \pm \sqrt{ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f};$$

puis, on égalera à zéro la quantité soumise au radical, ce qui donnera l'équation

$$(2) \qquad ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0.$$

Lorsque cette dernière équation représentera une ellipse,

la surface sera un ellipsoïde ou un hyperboloïde, à une nappe, suivant que la valeur de z correspondante à $x = \alpha$, $y = 6$, sera réelle ou imaginaire.

Si l'équation (2) appartient à une hyperbole, la surface sera un hyperboloïde à une ou à deux nappes, suivant que $x = \alpha$, $y = 6$ rendront z réelle ou imaginaire.

Il se peut que l'équation (2) représente deux droites concourantes au point $x = \alpha$, $y = 6$; dans ce cas, l'équation proposée appartiendra à un cône.

Si l'équation (2) n'admet que la seule solution réelle $x = \alpha$, $y = 6$, l'équation (1) représentera un cône, ou le point $x = \alpha$, $y = 6$, $z = m\alpha + n6 + p$, suivant que, en remplaçant x, y par des valeurs α', $6'$, autres que α, 6, la valeur correspondante de z sera réelle ou imaginaire.

Quand l'équation (2) n'admet aucune solution réelle, l'équation (1) représente un hyperboloïde à deux nappes ou une surface imaginaire, suivant que la valeur de z est réelle ou imaginaire pour des valeurs quelconques attribuées aux deux autres coordonnées.

Au reste, il sera généralement plus simple de rapporter la surface à son centre, en faisant disparaître les termes du premier degré.

§ II. — Surfaces qui ont une infinité de centres.

424. Nous supposons que les trois équations obtenues en égalant à zéro les dérivées $f'_{(x)}$, $f'_{(y)}$, $f'_{(z)}$ du premier membre $f(x, y, z)$ de l'équation proposée, admettent un nombre infini de solutions communes; alors les trois plans diamétraux $f'_{(x)} = 0$, $f'_{(y)} = 0$, $f'_{(z)} = 0$ coïncident, ou deux d'entre eux se coupent suivant une droite qui appartient au troisième. La résolution des équations numériques du premier degré $f'_{(x)} = 0$, $f'_{(y)} = 0$, $f'_{(z)} = 0$ fera distinguer facilement ces deux cas l'un de l'autre.

425. Dans le premier, l'équation proposée

$$f(x, y, z) = 0$$

représente généralement deux plans parallèles (page 519); il se peut, toutefois, que ces deux plans coïncident ou deviennent imaginaires (*). Pour être fixé à cet égard, il suffira de couper la surface considérée par un plan non parallèle à celui que représente $f'_{(x)} = 0$. Si l'intersection est formée d'une seule droite, la surface est un plan unique;

(*) L'équation générale du second degré

$$\begin{gathered} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0 \end{gathered}$$

peut s'écrire ainsi :

$$x.f'_{(x)} + y.f'_{(y)} + z.f'_{(z)} + 2Cx + 2C'y + 2C''z + 2E = 0, \tag{1}$$

en désignant par $f'_{(x)}, f'_{(y)}, f'_{(z)}$ les dérivées du premier membre.

Or, quand les trois plans

$$f'_{(x)} = 0, \quad f'_{(y)} = 0, \quad f'_{(z)} = 0$$

coïncident, on a les identités

$$f'_{(y)} = \frac{C'}{C} f'_{(x)}, \quad f'_{(z)} = \frac{C''}{C} f'_{(x)},$$

et l'équation (1) devient

$$x.f'_{(x)} + \frac{C'y}{C} f'_{(x)} + \frac{C''.z}{C} f'_{(x)} + 2Cx + 2C'y + 2C''z + 2E = 0,$$

ou

$$(Cx + C'y + C''z)\left[f'_{(x)} + 2C\right] + 2CE = 0. \tag{2}$$

Les mêmes identités donnent

$$B'' = \frac{AC'}{C}, \qquad B' = \frac{AC''}{C};$$

par suite,

$$f'_{(x)} = \frac{2A}{C}(Cx + C'y + C''z) + 2C,$$

si cette intersection est une ligne imaginaire, l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

n'admet aucune solution réelle, et, par conséquent, ne représente rien.

Prenons pour exemple l'équation

$$(1)\quad x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2xz + 2yx + 2x + 2y + 2z + f = 0.$$

Les trois plans, dont la rencontre détermine le centre, coïncident, puisque leurs équations sont évidemment identiques.

L'intersection de la surface et du plan xy est représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + f = 0,$$

qui revient à

$$(2)\qquad (x + y + 1)^2 + (f - 1) = 0.$$

Selon qu'on aura

$$f - 1 < 0, \quad = 0, \quad > 0,$$

l'équation (2) donnera deux droites parallèles : une seule droite, ou une ligne imaginaire. Dans ces mêmes conditions, l'équation (1) représente deux plans parallèles : un

---

d'où

$$Cx + C'y + C''z = \frac{C}{2A}\left[f'_{(x)} - 2C\right].$$

Substituant dans (2), il vient successivement

$$\frac{C}{2A}\left[\overline{f'_{(x)}}^2 - 4C^2\right] + 2CE = 0,$$

$$(3)\qquad f'_{(x)} = \pm 2\sqrt{C^2 - AE}.$$

D'après cela, on voit que l'équation proposée représente deux plans parallèles, un seul plan, une surface imaginaire, suivant qu'on a :

$$C^2 - AE > 0, \quad = 0, \quad < 0.$$

seul plan, ou une surface imaginaire. C'est ce que l'on peut immédiatement vérifier en mettant l'équation (1) sous cette forme,

$$(x+y+z+1)^2+(f-1)=0.$$

426. Lorsque deux des plans diamétraux $f'_{(x)}=0$, $f'_{(y)}=0$, $f'_{(z)}=0$, se coupent suivant une droite située dans le troisième, l'équation proposée

$$f(x,\ y,\ z)=0$$

représente, en général, un cylindre hyperbolique ou elliptique (page 518); elle peut aussi appartenir à l'une des variétés de ces deux cylindres.

Pour déterminer complétement la nature de la surface, on cherchera son intersection par un plan non parallèle à la droite commune aux trois plans diamétraux. Cette intersection peut être une hyperbole ou une ellipse, deux droites concourantes, un point, une ligne imaginaire. A ces différents cas correspondent : un cylindre hyperbolique ou elliptique, deux plans qui se coupent, une seule droite, une surface imaginaire.

427. Soit, comme exemple, l'équation

$$(1) \qquad x^2-y^2-2yz-2xz-2x-2y+f=0.$$

Les trois dérivées du premier membre, égalées à zéro, donnent

$$x-z-1=0, \quad y+z+1=0, \quad y+x=0.$$

La dernière de ces équations s'obtient en additionnant les deux précédentes, et celles-ci représentent deux plans qui se coupent; donc l'intersection de ces deux plans diamétraux est une droite située dans le troisième.

La surface est coupée par le plan des xy, suivant une ligne ayant pour équation

$$(3) \qquad x^2-y^2-2x-2y+f=0,$$

et qui est une hyperbole, lorsque f n'est pas nul. Mais si $f=0$, l'équation (3) devenant

$$(x+y)(x-y-2)=0,$$

représente les deux droites concourantes

$$x+y=0, \quad x-y-2=0.$$

Dans le premier cas, la surface est un cylindre hyperbolique; dans le second, elle est formée de deux plans qui se coupent suivant la droite des centres.

428. Considérons encore l'équation

$$(1) \qquad 2x^2+y^2+z^2-2xz+2xy-2y-2z+f=0.$$

Ses trois dérivées sont

$$2x-z+y=0, \quad y+x-1=0, \quad z-x-1=0;$$

la troisième se trouve en retranchant la seconde de la première; et comme, d'ailleurs, les deux premières représentent deux plans qui se coupent, il en faut conclure que les trois plans diamétraux se rencontrent suivant une même droite.

L'intersection de la surface et du plan des xy est déterminée par l'équation

$$2x^2+y^2+2xy-2y+f=0,$$

qui revient à

$$(x+y-1)^2+(x+1)^2+f-2=0.$$

Cette dernière équation donne une ellipse, un point ou une ligne imaginaire, selon que $f-2$ est négatif, nul ou positif; par conséquent, dans ces trois cas différents, l'équation (1) représente un cylindre elliptique, une droite ou une surface imaginaire.

§ III. — Surfaces dépourvues de centre.

429. Quand les trois équations qu'on obtient en égalant à zéro les dérivées du premier membre de l'équation pro-

posée n'admettent aucune solution commune, la surface n'a pas de centre, et, par conséquent, elle est un des deux paraboloïdes ou un cylindre parabolique.

Pour savoir auquel de ces trois genres elle appartient, il suffira de déterminer ses sections par des plans parallèles aux trois plans des coordonnées. En effet, ces trois plans ne pouvant être parallèles à une même droite, il faudra, si la surface est un paraboloïde elliptique, que l'une des sections soit une ellipse; cette condition est d'ailleurs suffisante, puisque le paraboloïde elliptique est la seule surface dépourvue de centre qui puisse donner lieu à une section elliptique.

De même, la condition nécessaire et suffisante pour que la surface soit un paraboloïde hyperbolique consiste en ce que l'une des trois sections doit être une hyperbole.

Enfin, si la surface est un cylindre parabolique, les sections seront nécessairement des paraboles ou des droites parallèles.

§ IV. — Application a des exemples numériques.

Exemples dans lesquels la surface a un centre.

430. *Premier exemple.*

$$xy + xz + yz - 2x - y - 3z + 1 = 0.$$

Coordonnées du centre :

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 0.$$

En prenant le centre pour origine, l'équation proposée se réduit à

$$xy + xz + yz - 1 = 0.$$

Cette dernière équation représente un hyperboloïde à deux nappes, puisque le nombre des coefficients de signes contraires au dernier terme est impair (nº 419).

Deuxième exemple.

$$2xy - xz + yz - 2x + 2y - 3z - 2 = 0.$$

Coordonnées du centre :

$$x = -\tfrac{3}{2},\quad y = \tfrac{3}{2},\quad z = 1.$$

En transportant les axes au centre, l'équation devient

$$2xy - xz + yz - \tfrac{1}{2} = 0;$$

et comme le nombre des coefficients de signes contraires au dernier terme est pair, elle représente un hyperboloïde à une nappe (n° 419).

Troisième exemple.

$$8xy - 16xz + 8yz - 8x + 8y - 16z - 7 = 0.$$

Coordonnées du centre :

$$x = -\tfrac{3}{4},\quad y = \tfrac{1}{2},\quad z = -\tfrac{1}{4}.$$

En faisant disparaître les termes du premier degré, il vient

$$8xy - 16xz + 8yz = 0;$$

ce qui est l'équation d'un cône.

Quatrième exemple.

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0.$$

Coordonnées du centre :

$$x = 0,\quad y = 1,\quad z = 1.$$

En plaçant l'origine au centre, on a

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2 = 0,$$

d'où

$$z = \pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}x^2 - y^2 - xy + 1}.$$

L'équation qu'on obtient en égalant à zéro la quantité soumise au radical appartient évidemment à une ellipse; d'ailleurs z est réelle pour $x = 0$, $y = 0$; donc l'équation proposée représente un ellipsoïde.

Cinquième exemple.

$$x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z+4=0.$$

Le centre a pour coordonnées

$$x=0,\quad y=1,\quad z=1;$$

en y transportant les axes, il vient

$$x^2+2y^2+2z^2+2xy=0$$

ou

$$z=\pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}x^2-y^2-xy}.$$

L'équation

$$\tfrac{1}{2}x^2+y^2+xy=0$$

donne

$$y=-\frac{x}{2}\pm\sqrt{-\frac{x^2}{4}},$$

et n'admet que la solution

$$x=0,\quad y=0.$$

Tout autre système de valeurs attribuées à x et y rend positif le trinôme $\frac{1}{2}x^2+y^2+xy$, et, par suite, z imaginaire. Donc l'équation proposée représente le centre

$$x=0,\quad y=1,\quad z=1.$$

Sixième exemple.

$$x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z+6=0.$$

En faisant disparaître les termes du premier degré, on a

$$x^2+2y^2+2z^2+2xy+2=0,$$

d'où

$$z=\pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}x^2-y^2-xy-2}.$$

L'équation

$$-\tfrac{1}{2}x^2-y^2-xy-2=0$$

donne

$$y=-\frac{x}{2}\pm\sqrt{-\frac{x^2}{4}-2},$$

et n'admet aucune solution. L'expression

$$-\tfrac{1}{2}x^2 - y^2 - xy - 2$$

reste négative pour toutes les valeurs réelles de x et de y; par suite, z est constamment imaginaire; donc l'équation proposée ne représente rien.

Septième exemple.

$$x^2 + 3y^2 - 2z^2 - 4yz + 2xy - 4x + 12z - 14 = 0.$$

Le centre a pour coordonnées

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 2.$$

En prenant ce point pour origine, l'équation devient

$$x^2 + 3y^2 - 2z^2 - 4yz + 2xy - 4 = 0,$$

et donne

$$z = -y \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2x^2 + 10y^2 + 4xy - 8}.$$

En égalant à zéro la quantité soumise au radical, on a l'équation

$$2x^2 + 10y^2 + 4xy - 8 = 0$$

ou

$$y = -\frac{x}{5} \pm \frac{2}{5}\sqrt{-x^2 + 5},$$

qui appartient évidemment à une ellipse. D'ailleurs, la valeur de z devient imaginaire lorsqu'on remplace x, y par zéro; donc la surface est un hyperboloïde à une nappe (n° 422).

Huitième exemple.

$$x^2 + 3y^2 - 2z^2 - 4yz + 2xy - 4x + 12z - 10 = 0.$$

Les coordonnées x, y, z du centre sont 1, 1, 2. L'équation de la surface rapportée au centre est

$$x^2 + 3y^2 - 2z^2 - 4yz + 2xy = 0$$

ou

$$z = -y \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2x^2 + 10y^2 + 4xy}.$$

Le radical égalé à zéro donne

$$10y^2 + 2x^2 + 4xy = 0$$

ou

$$y = -\frac{x}{5} \pm \frac{2x}{5}\sqrt{-1}.$$

Cette dernière équation n'admet que la solution

$$x = 0, \quad y = 0;$$

mais tout autre système de valeurs attribuées à x, y rend positive la quantité soumise au radical, et, par suite, la valeur de z est constamment réelle; il en résulte (n° 422) que la surface considérée est un cône.

Neuvième exemple.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 4xy + 4x + 4y - 4z + 3 = 0.$$

Coordonnées du centre :

$$x = 0, \quad y = -1, \quad z = +1.$$

Équation rapportée au centre :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 4xy - 1 = 0;$$

d'où

$$z = y \pm \sqrt{-x^2 - 4xy + 1}.$$

En égalant à zéro la quantité placée sous le radical, on obtient l'équation

$$-x^2 - 4xy + 1 = 0,$$

qui appartient à une hyperbole; de plus, la valeur de z est réelle pour $x = 0$, $y = 0$; donc la surface est un hyperboloïde à une nappe.

Dixième exemple.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 4xy + 4x + 4y - 4z + 5 = 0.$$

L'équation de la surface rapportée au centre

$$(x = 0, \quad y = -1, \quad z = 1)$$

devient

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 4xy + 1 = 0,$$

et donne

$$z = y \pm \sqrt{-x^2 - 4xy - 1}.$$

En égalant le radical à zéro, on trouve l'équation d'une hyperbole

$$x^2 + 4xy + 1 = 0;$$

d'ailleurs, la valeur de z est imaginaire pour $x = 0$, $y = 0$; donc la surface est un hyperboloïde à deux nappes.

Onzième exemple.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 4xy + 4x + 4y - 4z + 4 = 0.$$

En transportant les axes au centre

$$(x = 0, \quad y = -1, \quad z = 1),$$

on a

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 4xy = 0,$$

d'où

$$z = y \pm \sqrt{-x^2 - 4xy} = y \pm \sqrt{-x(x + 4y)}.$$

L'équation

$$x(x + 4y) = 0,$$

obtenue en égalant à zéro le radical, représente deux droites qui se coupent; par conséquent (n° 423), la surface est un cône.

Exemples dans lesquels il y a une infinité de centres.

431. *Premier exemple.*

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 12yz + 6xz + 4xy + 2x$$
$$+ 4y + 6z - 4 = 0.$$

Les trois équations dérivées qui déterminent les coordonnées du centre se réduisent à une seule, qui est

$$x + 3z + 2y + 1 = 0.$$

Cette dernière équation représente un plan dont tous les points peuvent être pris pour centres.

L'intersection de la surface et du plan des xy est déterminée par l'équation

$$x^2+4y^2+4xy+2x+4y-4=0,$$

qui donne les deux parallèles

$$y=-\left(\frac{x+1}{2}\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Donc la surface est formée de deux plans parallèles (n° 425).

Deuxième exemple.

$$x^2+y^2+z^2-2yz+2xz-2xy+x-y+z+1=0.$$

Les trois équations dérivées se réduisent à

$$2x+2z-2y+1=0;$$

de plus, en supposant $z=0$, l'équation proposée devient

$$x^2+y^2-2xy+x-y+1=0,$$

et donne

$$y=\frac{2x+1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3};$$

par conséquent, la surface est imaginaire (n° 425).

Troisième exemple.

$$2x^2+8y^2+2z^2-8yz-4xz+8xy+x$$
$$+2y-z+\tfrac{1}{8}=0.$$

Les trois équations dérivées se réduisent à

$$4x-4z+8y+1=0.$$

L'intersection de la surface et du plan des xy est déterminée par l'équation

$$2x^2+8y^2+8xy+x+2y+\tfrac{1}{8}=0,$$

qui représente deux droites coïncidant avec

$$y=-\frac{x}{2}-\frac{1}{8}.$$

Il s'ensuit que la surface considérée est le plan

$$4x - 4z + 8y + 1 = 0 \quad (\text{n}^\circ \, 428),$$

qui contient tous les centres.

Quatrième exemple.

$$2x^2 + 3y^2 + 18z^2 + 14yz + 8xz + 2xy + 8x + 4y + 16z + 1 = 0.$$

En égalant à zéro les trois dérivées, on a

$$(1) \qquad 2x + y + 4z + 4 = 0,$$
$$(2) \qquad x + 3y + 7z + 2 = 0,$$
$$(3) \qquad 4x + 7y + 18z + 8 = 0.$$

Si on additionne l'équation (1) avec le double de (2), on obtient l'équation (3); par conséquent, la surface a une infinité de centres situés sur la droite intersection des plans (1) et (2).

En coupant la surface par le plan des xy, on trouve l'ellipse

$$2x^2 + 3y^2 + 2xy + 8x + 4y + 1 = 0;$$

donc l'équation proposée représente un cylindre elliptique.

Cinquième exemple.

$$x^2 + 3y^2 - 2yz - 2xz + 4xy + 2x + 4y - 2z + 2 = 0$$

Les trois équations du centre sont

$$x + 2y - z + 1 = 0,$$
$$2x + 3y - z + 2 = 0,$$
$$y + x + 1 = 0;$$

et comme la troisième s'obtient en retranchant la première de la seconde, on voit que la surface a une infinité de centres en ligne droite.

L'intersection de la surface et du plan xy est l'hyperbole

$$x^2 + 3y^2 + 4xy + 2x + 4y + 2 = 0;$$

donc l'équation proposée appartient à un cylindre hyperbolique.

Sixième exemple.

$$x^2 + y^2 + 6z^2 + 6yz + 6xz + 4xy$$
$$+ 4x + 2y + 6z + 1 = 0.$$

Les équations du centre sont :

$$x + 2y + 3z + 2 = 0,$$
$$2x + y + 3z + 1 = 0,$$
$$x + y + 2z + 1 = 0;$$

la troisième résultant de l'addition des deux autres, tous les points de la droite représentée par les deux premières sont des centres.

L'intersection de la surface et du plan des xy est donnée par l'équation

$$x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y + 1 = 0,$$

ou

$$y = -(2x + 1) \pm x\sqrt{3}.$$

Cette équation représentant le système de deux droites concourantes, l'équation proposée donne deux plans qui se coupent suivant la droite des centres.

Septième exemple.

$$x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 6yz + 4xz + 2xy$$
$$+ 2x + 2y + 4z + 1 = 0.$$

On a, pour les équations du centre :

$$x + y + 2z + 1 = 0,$$
$$x + 2y + 3z + 1 = 0,$$
$$2x + 3y + 5z + 2 = 0;$$

la troisième est la somme des deux précédentes; donc tous les points de la droite que les deux premières représentent sont des centres.

Pour $z = 0$, l'équation proposée devient

$$x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1 = 0,$$

ou

$$y = -\tfrac{1}{2}(x+1) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-(x+1)^2}.$$

Cette dernière n'admettant que la solution

$$x = -1, \quad y = 0,$$

il en résulte que le lieu géométrique déterminé par l'équation proposée est la droite des centres.

Huitième exemple.

$$x^2 + y^2 + 5z^2 - 4yz + 2xz + 2y - 4z + 1 = 0.$$

Les équations dérivées sont

$$x + z = 0,$$
$$y - 2z + 1 = 0,$$
$$x - 2y + 5z - 2 = 0.$$

On obtient la troisième en retranchant de la première le double de la seconde; d'où il suit que les deux premières représentent une droite dont tous les points peuvent être pris pour centres.

En faisant $z = 0$ dans l'équation donnée, il vient

$$x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + (y+1)^2 = 0.$$

Cette dernière équation n'admettant aucune solution réelle, l'équation représente une surface imaginaire.

Exemples dans lesquels la surface n'a pas centre.

432. *Premier exemple.*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 2xz - 2xy + x - y + 2z + 1 = 0.$$

Les équations dérivées $f'_{(x)} = 0$, $f'_{(y)} = 0$, $f'_{(z)} = 0$, sont ici :

$$2x + 2z - 2y + 1 = 0,$$
$$2x + 2z - 2y + 1 = 0,$$
$$2x + 2z - 2y + 2 = 0;$$

et il est évident qu'elles n'admettent aucune solution commune, donc la surface n'a pas de centre.

Si l'on coupe la surface par un plan $z=\gamma$, parallèle au plan des xy, les équations de la section seront

$$z=\gamma,$$
$$y^2-y(2\gamma+2x+1)+x^2+2\gamma x+x+\gamma^2+2\gamma+1=0.$$

Cette dernière donne

$$y=\tfrac{1}{2}(2\gamma+2x+1)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-4\gamma-3},$$

et sous cette forme on reconnaît qu'elle représente deux parallèles, lorsqu'on a $-4\gamma-3>0$.

Par conséquent, la surface est un cylindre parabolique (n° 429).

Deuxième exemple.

$$x^2+3y^2-2yz-2xz+4xy+2x+4y-z+2=0.$$

On a, pour équations du centre:

$$(1)\qquad x+2y-z+1=0,$$
$$(2)\qquad 2x+3y-z+2=0,$$
$$(3)\qquad x+y+\tfrac{1}{2}=0.$$

Si de l'équation (2) on retranche la somme des deux autres, on trouve $\frac{1}{2}=0$; donc ces équations n'admettent aucune solution commune, c'est-à-dire que la surface considérée n'a aucun centre.

En coupant cette surface par le plan des xy, on a l'hyperbole

$$x^2+3y^2+4xy+2x+4y+2=0;$$

il en faut conclure que l'équation proposée représente un paraboloïde hyperbolique.

Troisième exemple.

$$\begin{aligned}2x^2+3y^2+18z^2+14yz+8xz+2xy&\\+8x+4y+10z+1&=0.\end{aligned}$$

Les trois équations dérivées sont :

$$(1)\qquad 2x + y + 4z + 4 = 0,$$

$$(2)\qquad x + 3y + 7z + 2 = 0,$$

$$(3)\qquad 4x + 7y + 18z + 5 = 0.$$

Si l'on retranche la troisième équation du double de la seconde augmenté de la première, on trouve $3 = 0$; donc ce système n'a pas de solution, et par conséquent la surface est dépourvue de centre.

L'intersection de cette surface et du plan des xy est l'ellipse

$$2x^2 + 3y^2 + 2xy + 8x + 4y + 1 = 0;$$

il s'ensuit que l'équation proposée représente un paraboloïde elliptique.

CHAPITRE HUITIÈME.

DES SURFACES SPHÉRIQUES, CONIQUES ET CYLINDRIQUES.

De la surface sphérique.

433. En représentant par α, β, γ, les coordonnées du centre d'une sphère, et par r son rayon, l'équation la plus générale de cette surface est évidemment

$$\left.\begin{array}{l}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\\ +2(x-\alpha)(y-\beta)\cos(x,y)\\ +2(x-\alpha)(z-\gamma)\cos(x,z)\\ +2(y-\beta)(z-\gamma)\cos(y,z)\end{array}\right\}=r^2.$$

Quand les axes sont rectangulaires, l'équation se réduit à

$$(1)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2.$$

Cas particuliers. — Le centre peut être placé sur l'un des plans coordonnés, celui des xy par exemple ; on a alors $\gamma=0$, et, par suite,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=r^2;$$

mettons le centre sur l'axe des x, nous aurons $\beta=0$, $\gamma=0$, et l'équation sera

$$(x-\alpha)^2+y^2+z^2=r^2.$$

Enfin, lorsque le centre est à l'origine, l'équation (1) devient

$$(2)\qquad x^2+y^2+z^2=r^2;$$

c'est la forme sous laquelle l'équation de la sphère est employée ordinairement.

434. L'équation (1) étant développée donne un résultat de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0.$$

Réciproquement, toute équation de cette forme, quand les axes sont rectangulaires, représente une surface sphérique dont les coordonnées du centre sont

$$\alpha = -\frac{A}{2}, \quad \beta = -\frac{B}{2}, \quad \gamma = -\frac{C}{2},$$

et qui a pour rayon

$$r = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{4} - D}.$$

Cette proposition se démontre comme celle du n° 54.

435. Pour trouver l'intersection d'une sphère et d'un plan, il faut (n° 365) combiner l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

avec les formules

$$x = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi \cos\theta + a,$$
$$y = x' \sin\varphi - y' \cos\varphi \cos\theta + b,$$
$$z = y' \sin\theta + c;$$

l'équation résultante en x', y' sera celle de la courbe d'intersection.

Or, en effectuant les calculs, on reconnaît : 1° que le coefficient de $x'y'$ est nul ; 2° que les coefficients de x'^2 et de y'^2 sont égaux à l'unité : ainsi (n° 54), cette équation est celle d'un cercle.

Remarque. — Si l'on éliminait une des variables, z par exemple, entre l'équation (2) et l'équation

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

d'un plan quelconque, on obtiendrait l'équation d'une ellipse. On en conclurait que la projection d'un cercle sur un plan est une ellipse.

436. Proposons-nous maintenant de déterminer l'équa-

tion du *plan tangent* à la sphère, au point (x', y', z') de cette surface rapportée à des axes rectangulaires.

Soient

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$$

l'équation de la sphère, et (nº 346)

$$(2) \qquad A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0$$

celle d'un plan passant par le point (x', y', z').

Il est visible que le rayon mené au point de contact a pour équations

$$x-x'=\frac{x'-\alpha}{z'-\gamma}(z-z'), \quad y-y'=\frac{y'-\beta}{z'-\gamma}(z-z').$$

Or, le plan cherché devant être perpendiculaire à ce rayon, on est conduit (nº 354) aux relations

$$A=\frac{x'-\alpha}{z'-\gamma}C, \quad B=\frac{y'-\beta}{z'-\gamma}C;$$

ces valeurs, portées dans l'équation (2), donnent

$$(a) \quad (x'-\alpha)(x-x')+(y'-\beta)(y-y')+(z'-\gamma)(z-z')=0$$

pour l'équation du plan tangent.

Cette équation peut être présentée sous une autre forme, au moyen de la relation

$$(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2=r^2,$$

qui exprime que le point (x', y', z') se trouve sur la sphère.

En effet, cette relation revient à

$$(x'-\alpha)(x'-\alpha)+(y'-\beta)(y'-\beta)+(z'-\gamma)(z'-\gamma)=r^2;$$

et, en l'ajoutant à l'équation (a), on trouve

$$(b) \quad (x'-\alpha)(x-\alpha)+(y'-\beta)(y-\beta)+(z'-\gamma)(z-\gamma)=r^2.$$

Quand l'origine est au centre de la sphère, on a

$$\alpha=0, \quad \beta=0, \quad \gamma=0,$$

et l'équation (b) se réduit à

$$x'x + y'y + z'z = r^2.$$

C'est l'équation qu'on emploie généralement dans les applications.

Des surfaces coniques.

437. On nomme *surface conique* la surface engendrée par une droite qui se meut en passant constamment par un point donné et en s'appuyant sur une ligne aussi donnée. Le point donné est le *sommet*, la ligne donnée est la *directrice*, et la droite mobile la *génératrice*.

Soient x', y', z' les coordonnées du sommet du cône, et

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0,$$

les équations de la directrice.

Les équations de la génératrice seront de la forme

$$(2) \qquad x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z').$$

Puisque cette droite doit rencontrer la courbe, il faut que les équations (1) et (2) aient une solution commune; par suite, que l'équation résultant de l'élimination de x, y, z entre (1) et (2), équation que nous représenterons par

$$(3) \qquad f(a, b) = 0,$$

soit vérifiée par toutes les valeurs que recevront les indéterminées a et b dans les différentes positions que prendra la génératrice. Il résulte de là que si on donne une valeur arbitraire à a, et que l'on calcule la valeur correspondante de b, ces valeurs, portées dans les équations (2), feront connaître une position particulière de la génératrice. Par conséquent, l'équation

$$(4) \qquad f\left(\frac{x - x'}{z - z'}, \frac{y - y'}{z - z'}\right) = 0,$$

à laquelle on parvient en éliminant a et b entre les équations (2) et (3), est l'équation générale des surfaces coniques.

438. Lorsqu'on suppose le sommet de la surface à l'origine des coordonnées, x', y', z' sont nuls, et l'équation (4) se réduit à

$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0;$$

c'est la forme générale des équations homogènes. Ainsi *l'équation de toute surface conique est homogène, quand l'origine des coordonnées est placée au sommet de cette surface.*

La réciproque est vraie, car si l'on coupe une surface dont l'équation est une fonction homogène des trois variables x, y, z, par un plan

$$z = ax + by,$$

mené par l'origine, la projection de l'intersection sur le plan des xy, par exemple, aura une équation homogène en x et y; et cette équation représentera alors un système de lignes droites (*). Tout plan mené par l'origine rencontrant la surface suivant un système de lignes droites, il s'ensuit que cette surface est conique.

439. On conclut de là que, pour reconnaître si une surface dont l'équation est donnée appartient à la *famille* des surfaces coniques, il faut déplacer l'origine et égaler à zéro les coefficients de tous les termes dont le degré est inférieur

---

(*) L'équation homogène

$$y^m + a_1 xy^{m-1} + a_2 x^2 y^{m-2} \ldots + a_m x^m = 0$$

représente le système d'autant de lignes du premier ordre, qui passent par l'origine, que l'équation numérique

$$z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} \ldots + a_m = 0,$$

que l'on obtient en posant $y = zx$, renferme de racines réelles et inégales; car, en désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ les racines de l'équation en z, on pourra mettre la proposée sous la forme

$$(y - \alpha_1 x)(y - \alpha_2 x)(y - \alpha_3 x)\ldots(y - \alpha_m x) = 0.$$

à celui de l'équation transformée, ce qui la rend homogène. Si les équations de condition fournissent des valeurs réelles et finies pour a, b, c (n° 359), il en résulte que la surface est conique; sinon, elle ne l'est pas.

440. Appliquons ce qui précède à la recherche de l'équation, en coordonnées rectangulaires, du cône oblique à base circulaire.

En plaçant la base dans le plan des xy, et son centre à l'origine, elle aura pour équations

$$(1) \qquad x^2+y^2=r^2, \quad z=0;$$

celles de la génératrice seront

$$(2) \qquad x-x'=a(z-z'), \quad y-y'=b(z-z'),$$

si on désigne par x', y', z' les coordonnées du sommet.

L'hypothèse $z=0$, introduite dans les équations (2), donne

$$x=x'-az', \quad y=y'-bz';$$

portant ces valeurs dans la première des équations (1), on trouve

$$(3) \qquad (x'-az')^2+(y'-bz')^2=r^2$$

pour la relation qui doit exister entre les paramètres a et b. Enfin, si l'on élimine a et b entre les équations (2) et (3), on obtiendra l'équation

$$[x'(z-z')-z'(x-x')]^2+[y'(z-z')-z'(y-y')]^2 \\ =r^2(z-z')^2,$$

ou

$$(x'z-z'x)^2+(y'z-z'y)^2=r^2(z-z')^2,$$

qui sera celle de la surface.

Dans le cas du *cône droit*, c'est-à-dire lorsque le sommet est sur l'axe des z, on a, à la fois,

$$x'=0, \quad y'=0,$$

et l'équation précédente se réduit à

$$z'^2x^2 + z'^2y^2 = r^2(z - z')^2;$$

en combinant cette équation avec les formules (n° 365), on pourrait obtenir les sections coniques, déterminées précédemment par une autre méthode.

Remarque. — Dans la question relative au cône oblique à base circulaire, si l'on prenait le sommet pour origine, et un plan parallèle à celui de la directrice pour plan des xy, les équations de cette courbe seraient

$$z = \delta, \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

et celles de la génératrice,

$$x = az, \quad y = bz.$$

On aurait évidemment, pour équation de condition,

$$(a\delta - \alpha)^2 + (b\delta - \beta)^2 = r^2;$$

ce qui conduirait à

$$(\delta x - \alpha z)^2 + (\delta y - \beta z)^2 - r^2z^2 = 0$$

pour l'équation de la surface.

Des surfaces cylindriques.

441. On nomme *surface cylindrique* la surface engendrée par une droite assujettie à glisser sur une ligne fixe en restant parallèle à une direction donnée. La ligne fixe est appelée *directrice*, la droite mobile est la *génératrice*.

Soient

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0,$$

les équations de la directrice; celles de la génératrice seront de la forme

$$(2) \qquad x = az + p, \quad y = bz + q,$$

a et b étant deux constantes données. Puisque cette droite

doit rencontrer la courbe, il faut que les équations (1) et (2) aient une solution commune. Par suite, l'équation résultant de l'élimination de x, y, z entre (1) et (2), équation que nous pouvons représenter par

$$(3) \qquad f(p, q) = 0,$$

doit être satisfaite par toutes les valeurs que reçoivent les indéterminées p et q dans les différentes positions que prend la génératrice. Il suit de là que, si on élimine p et q entre les équations (2) et (3), l'équation résultante, savoir :

$$f(x - az,\ y - bz) = 0,$$

sera l'équation générale des surfaces cylindriques.

442. Appliquons la méthode au cylindre qui aurait pour directrice l'ellipse

$$(1) \qquad z = 0, \quad A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2.$$

Soient toujours

$$(2) \qquad x = az + p, \quad y = bz + q,$$

les équations de la génératrice, l'élimination de x, y, z entre les quatre équations précédentes conduit à la relation

$$(3) \qquad A^2q^2 + B^2p^2 = A^2B^2.$$

Éliminant p et q entre (2) et (3), on trouve, pour le cylindre demandé,

$$A^2(y - bz)^2 + B^2(x - az)^2 = A^2B^2.$$

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE.

ERRATA.

Page 76, ligne 2 en remontant; *au lieu de* $26 \cos\theta$, *lisez* $6 \cos\theta$.

Page 111, ligne 4 en descendant; *au lieu de* $\sin 65^\circ$, *lisez* $-\sin 65^\circ$.

Page 111, ligne 8 en descendant; *au lieu de* $x' \sin 65^\circ$, *lisez* $-x' \sin 65^\circ$.

Page 226, ligne 1 en descendant; *au lieu de* SI, *lisez* PI.

Page 226, ligne 3 en descendant; *au lieu de* SI, *lisez* PI.

Page 380, ligne 4 en descendant; *au lieu de* $b^2 x'$, *lisez* $b^2 x'$.

Page 411, ligne 2 en remontant; *au lieu de* $\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi + x$, *lisez*

$$\sin\left[\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi + x\right].$$

Page 459, ligne 1 en remontant; *au lieu de* supose, *lisez* suppose.

Page 463, ligne 4 en descendant; *au lieu de* axes, *lisez* plans.

Page 464, ligne 8 en remontant; *au lieu de* plan, *lisez* point.

Page 483, ligne 4 en descendant; *au lieu de* une donnée, *lisez* une droite donnée.

Page 501, lignes 9 et 10 en remontant; *au lieu de* $x - x' = \frac{aH}{a^2+b^2+1}$,

$$y - y' = \frac{bH}{a^2+b^2+1}, \quad \textit{lisez}\ x - x' = \frac{aH}{a^2+b^2+1} + p - x';$$

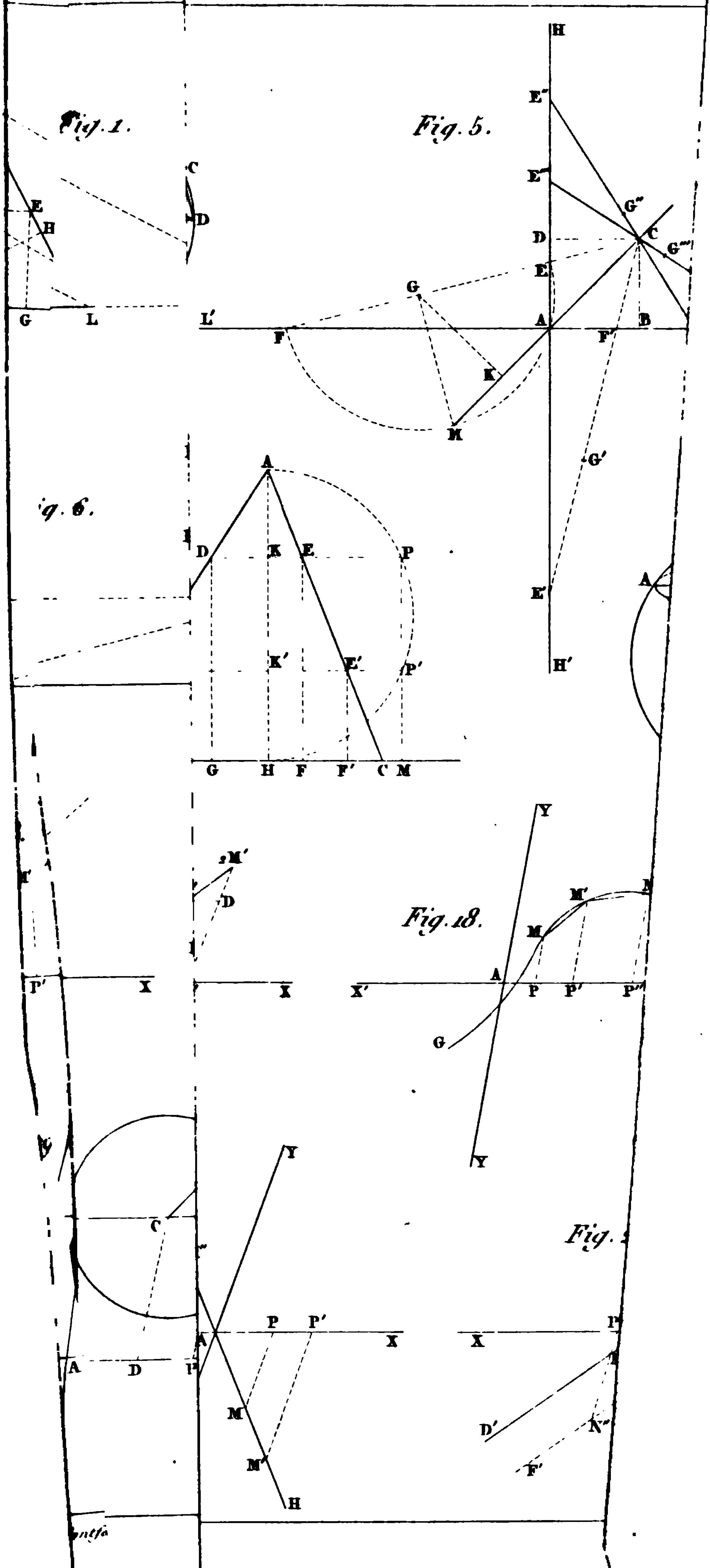
$$y - y' = \frac{bH}{a^2+b^2+1} + q - y'.$$

Page 516, ligne 1 en remontant; *au lieu de* K, *lisez* E.

Page 520, lignes 7 et 8 en descendant; *au lieu de* « $y = ns$. Soient », *lisez* « $y = nz$, soient ».

Page 547, ligne 3 en descendant; *au lieu de* ces, *lisez* ses.

T (GE). Géom



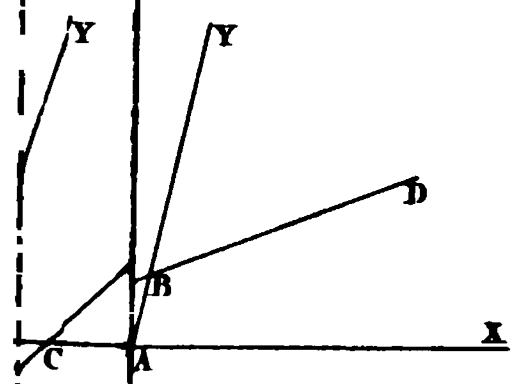
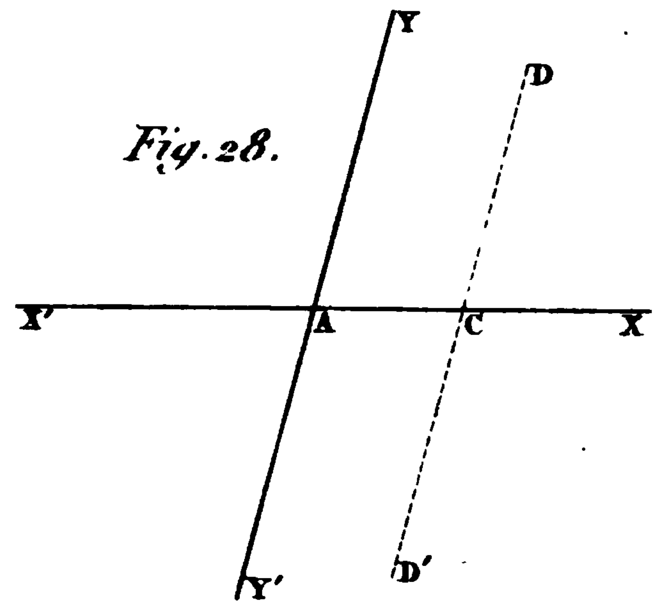


Fig. 28.



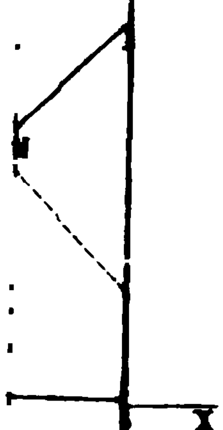


Fig. 33.

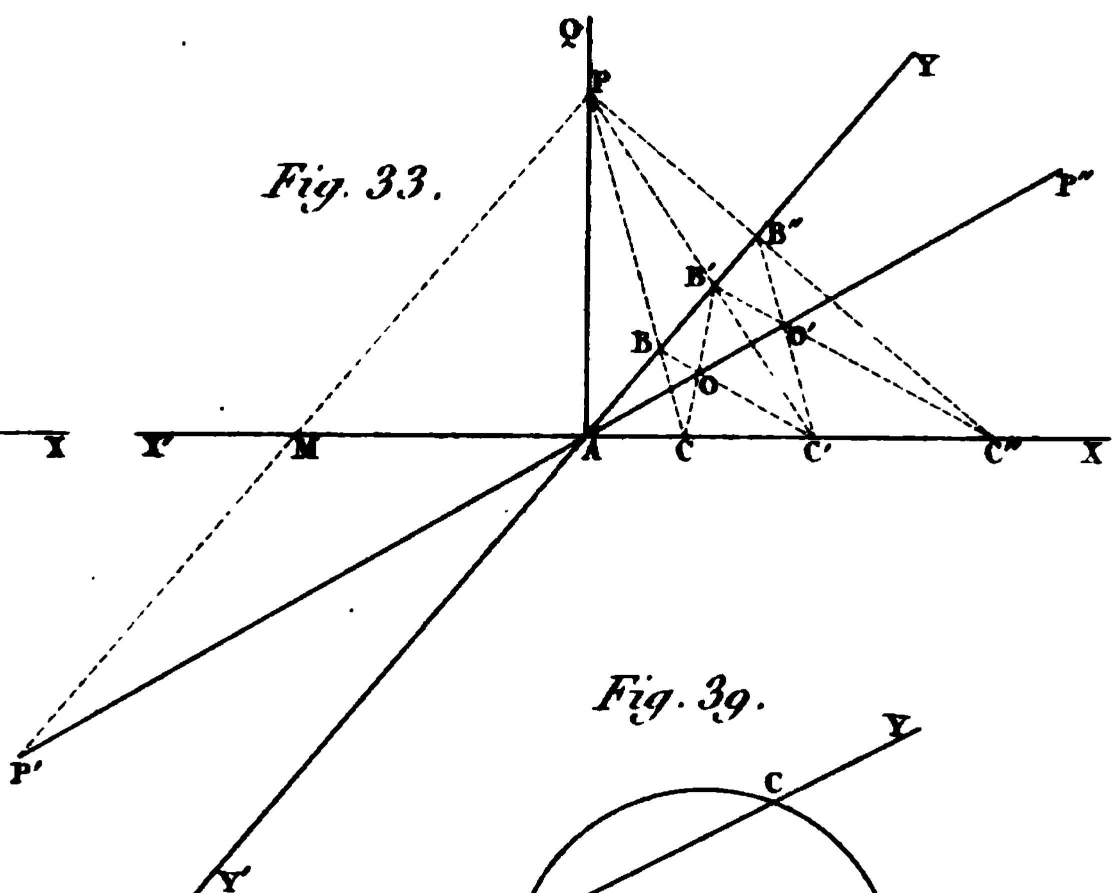
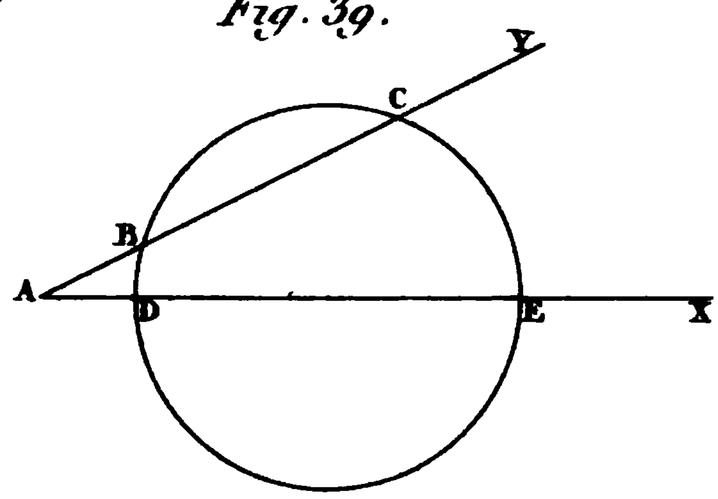


Fig. 39.



40.

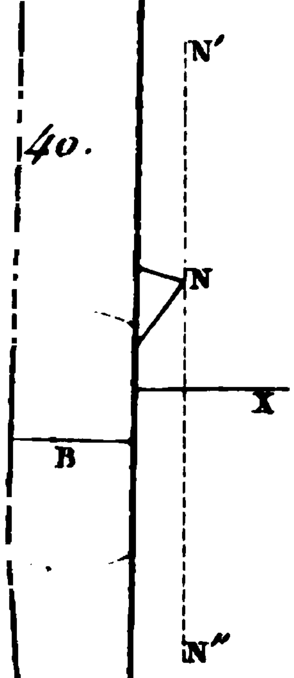
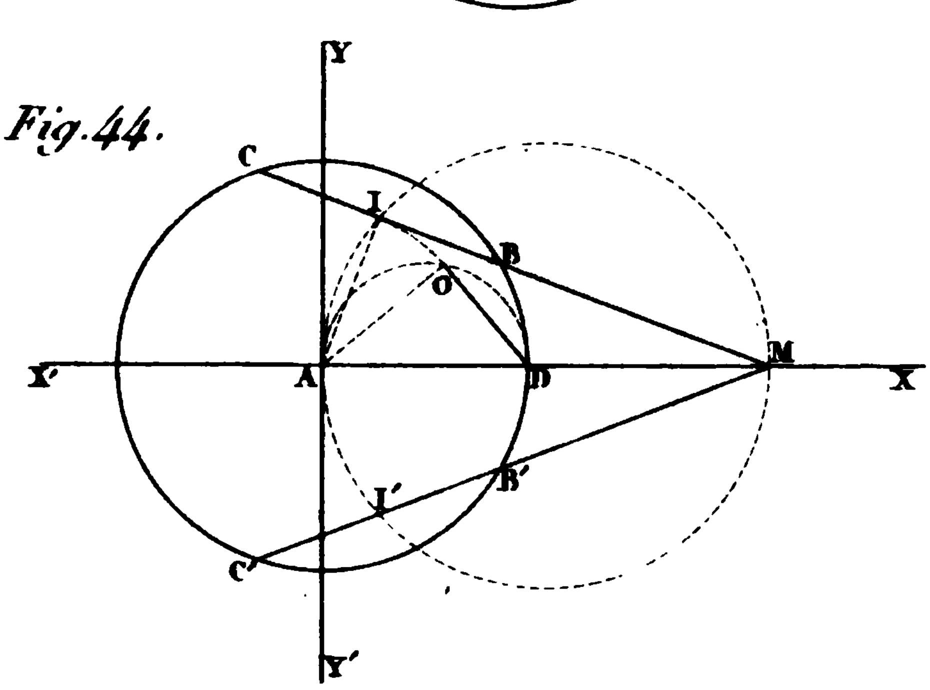


Fig. 44.



Dulos sc.

Fig. 4

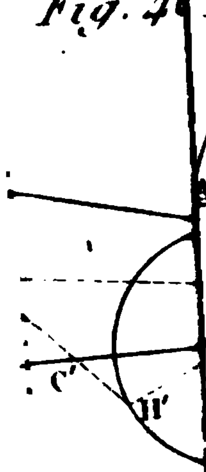


Fig. 48.

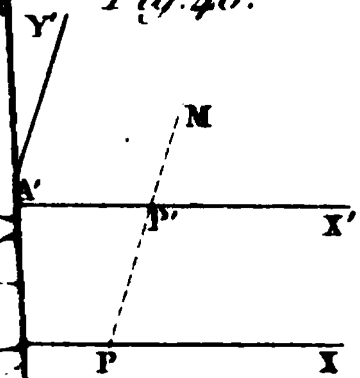
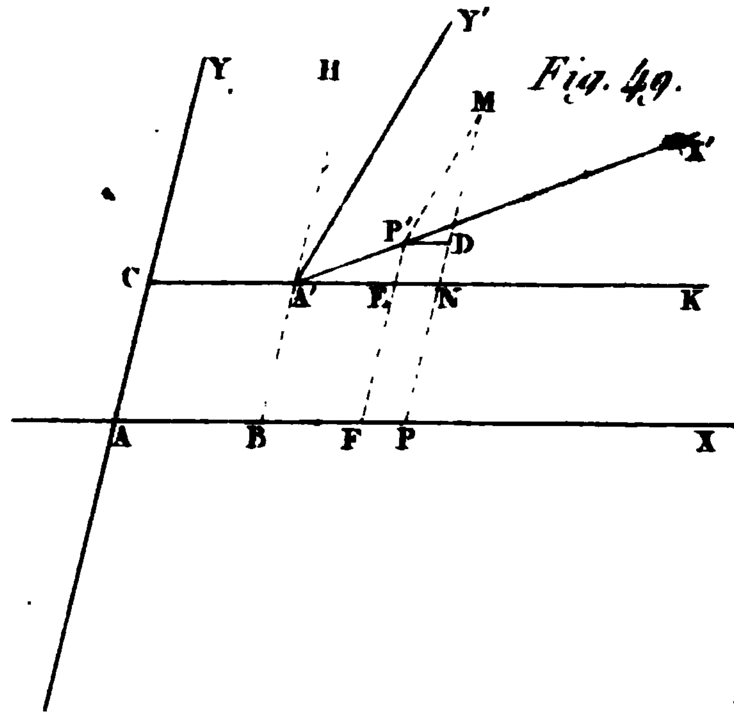


Fig. 49.



3.

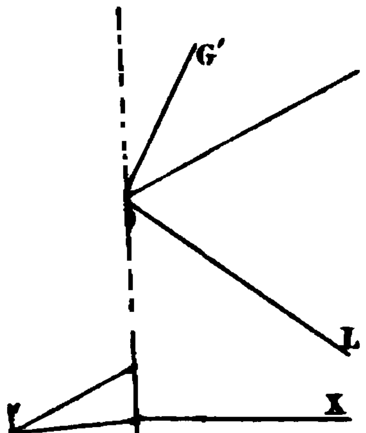
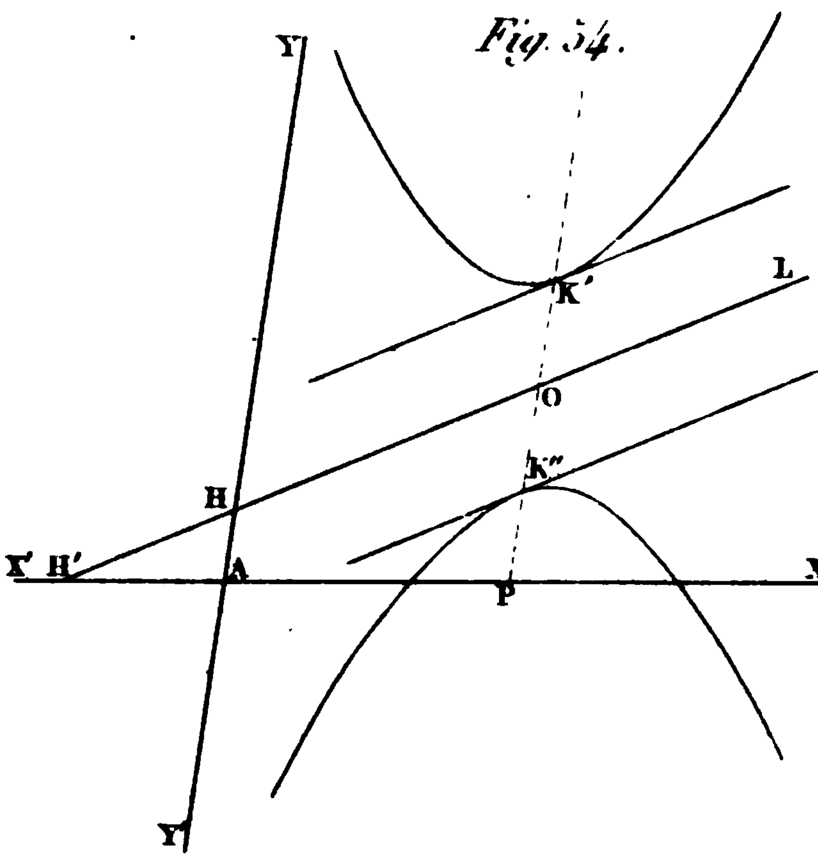


Fig. 54.



8.

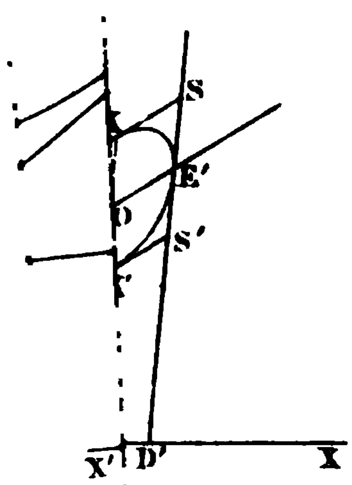
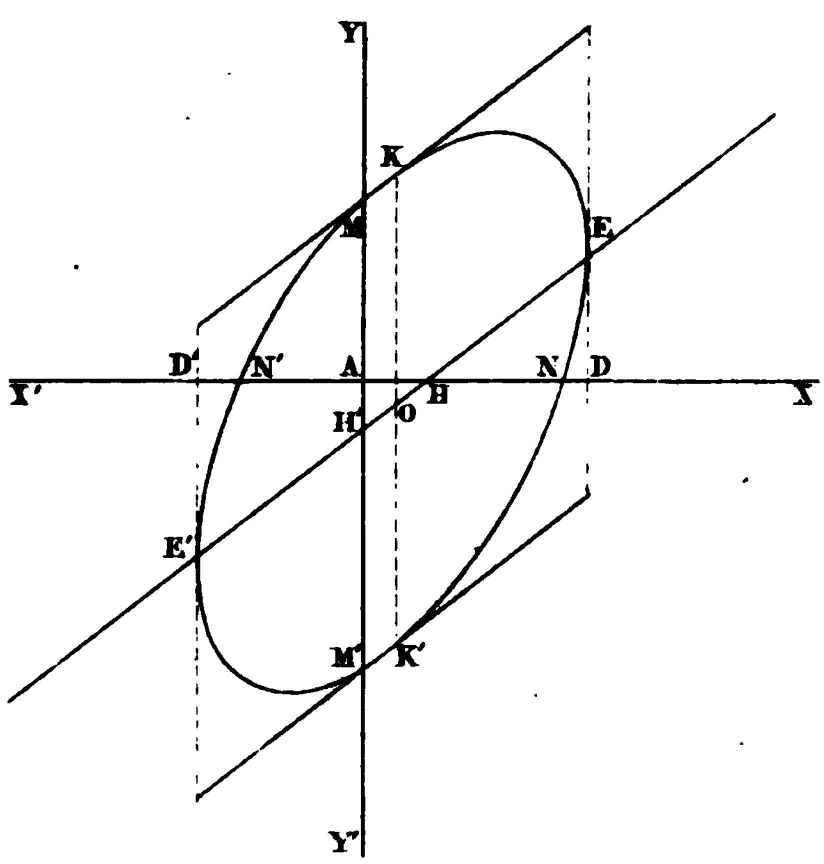


Fig. 59.



Dulos sc.

sc.

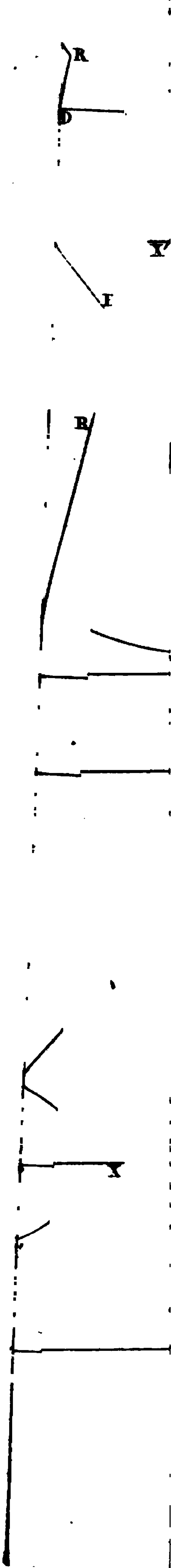


Fig. 63.

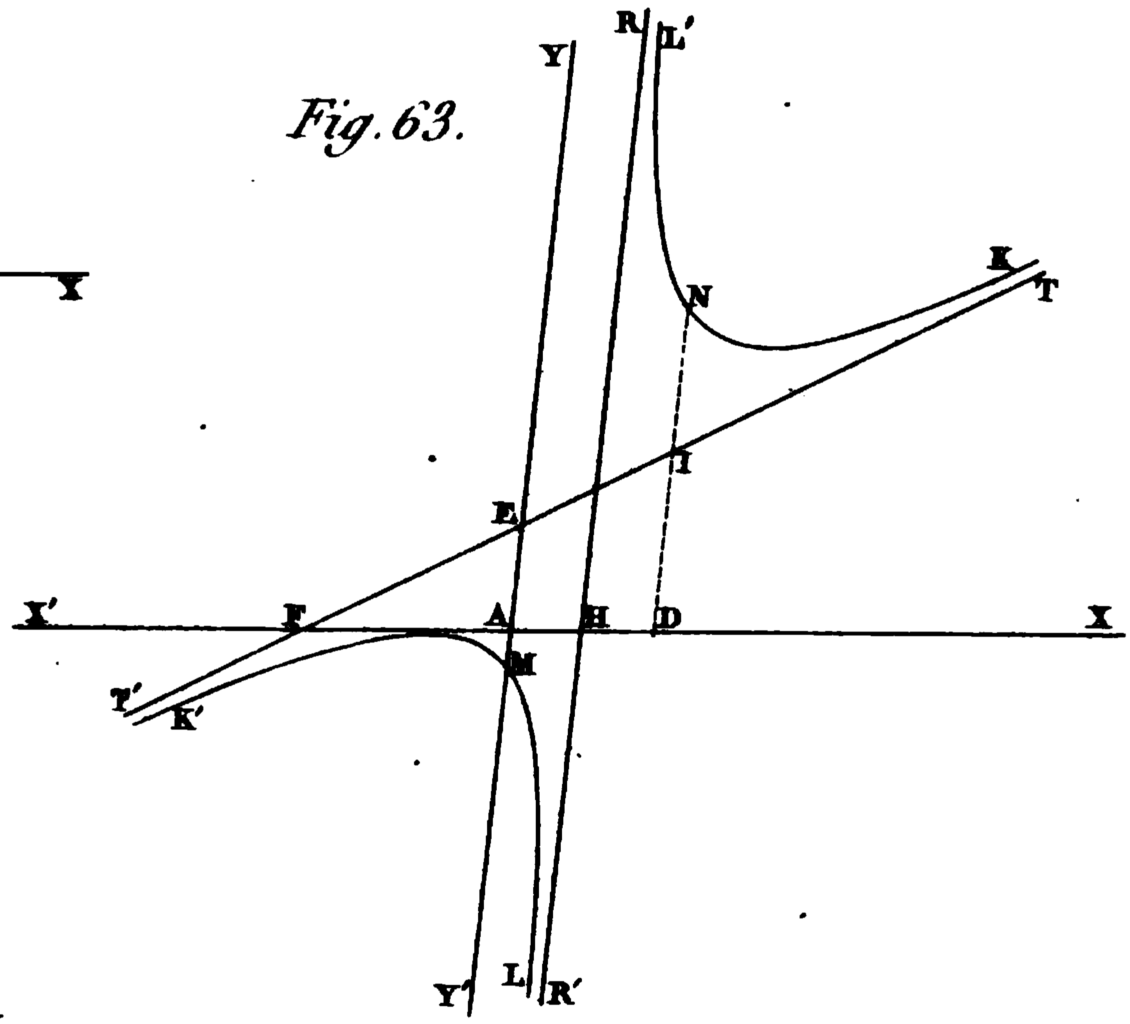


Fig. 67.

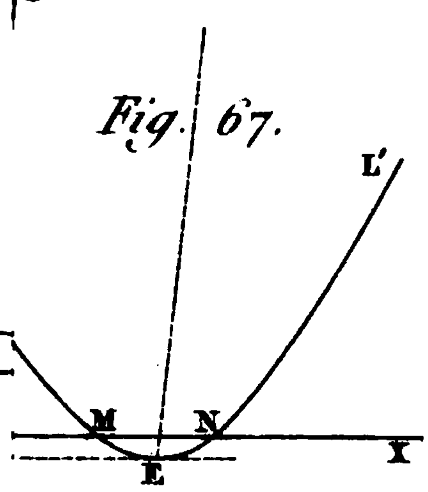


Fig. 68.

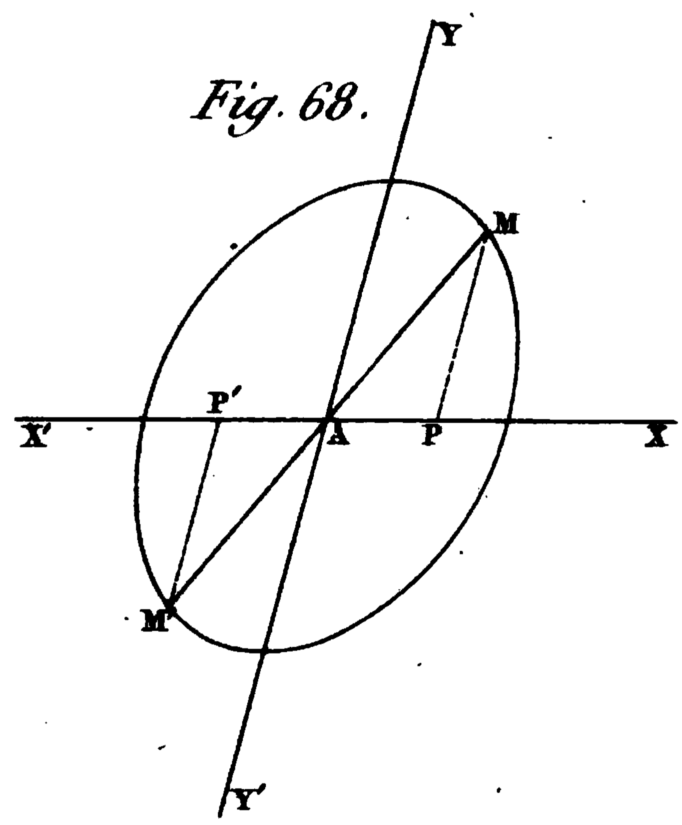
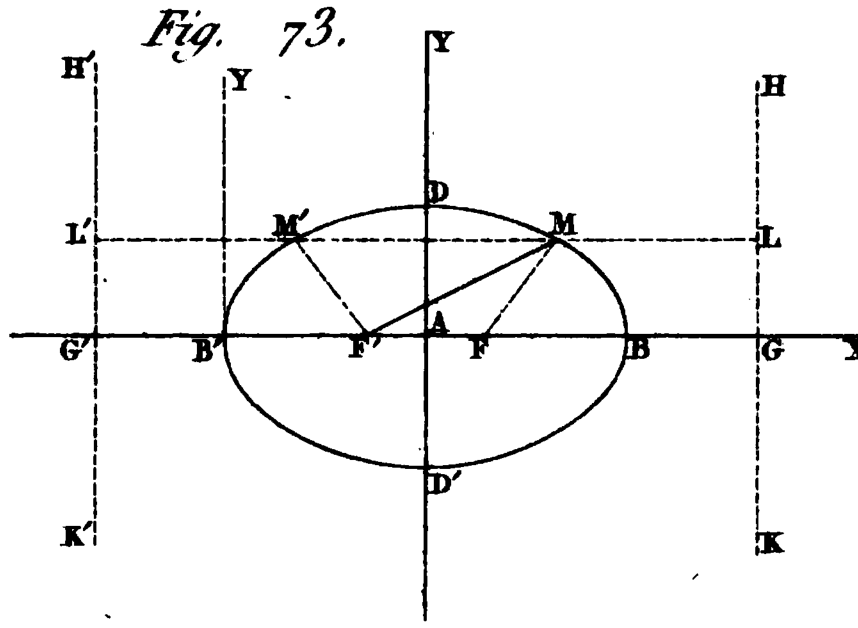


Fig. 73.



Dulos sc.

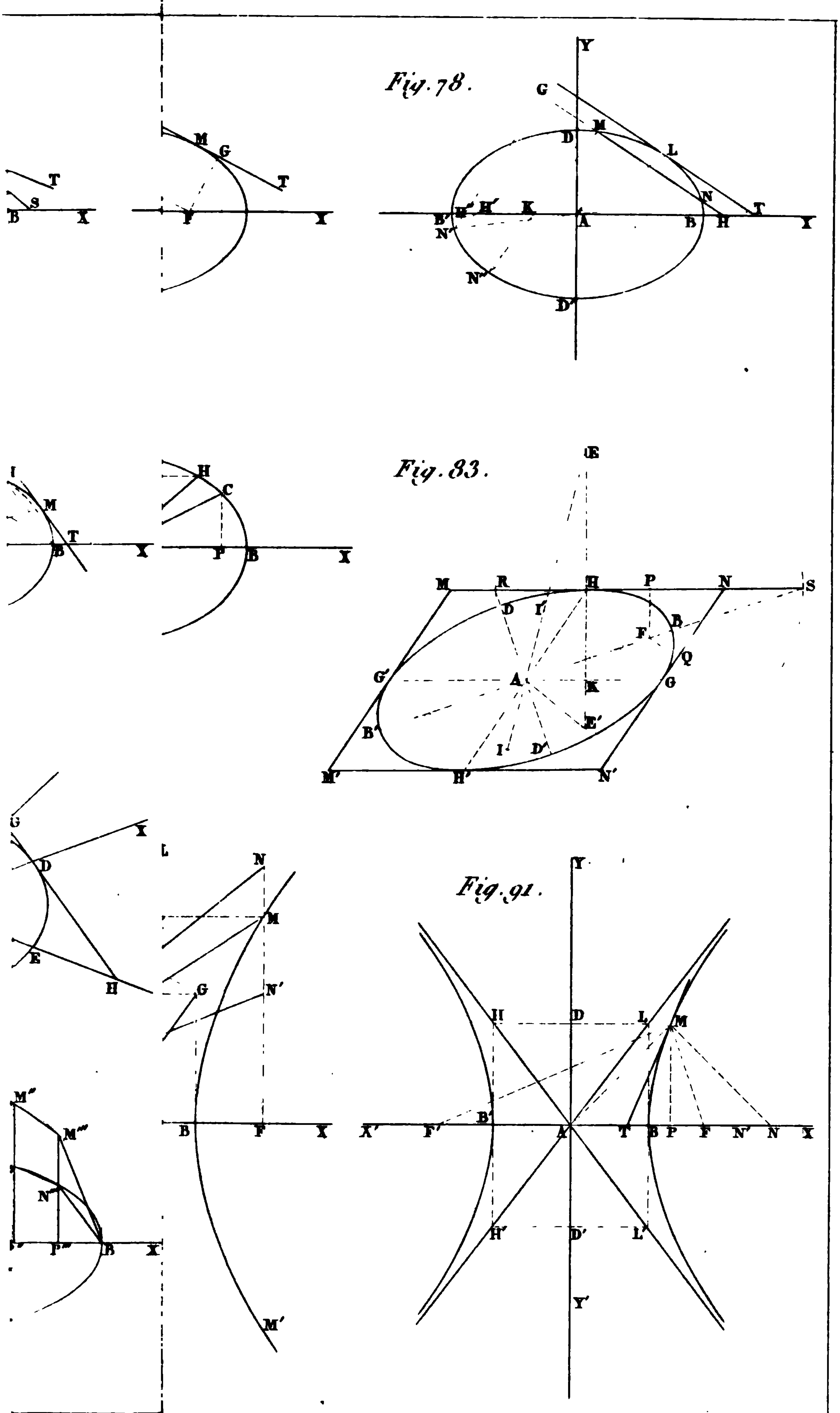


Fig. 78.

Fig. 83.

Fig. 91.

Dulos sc.

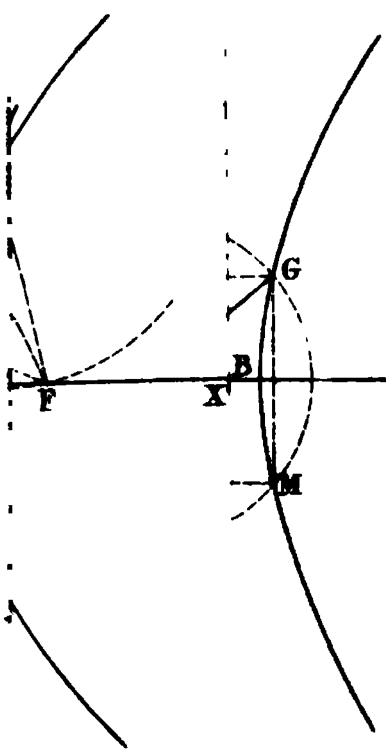
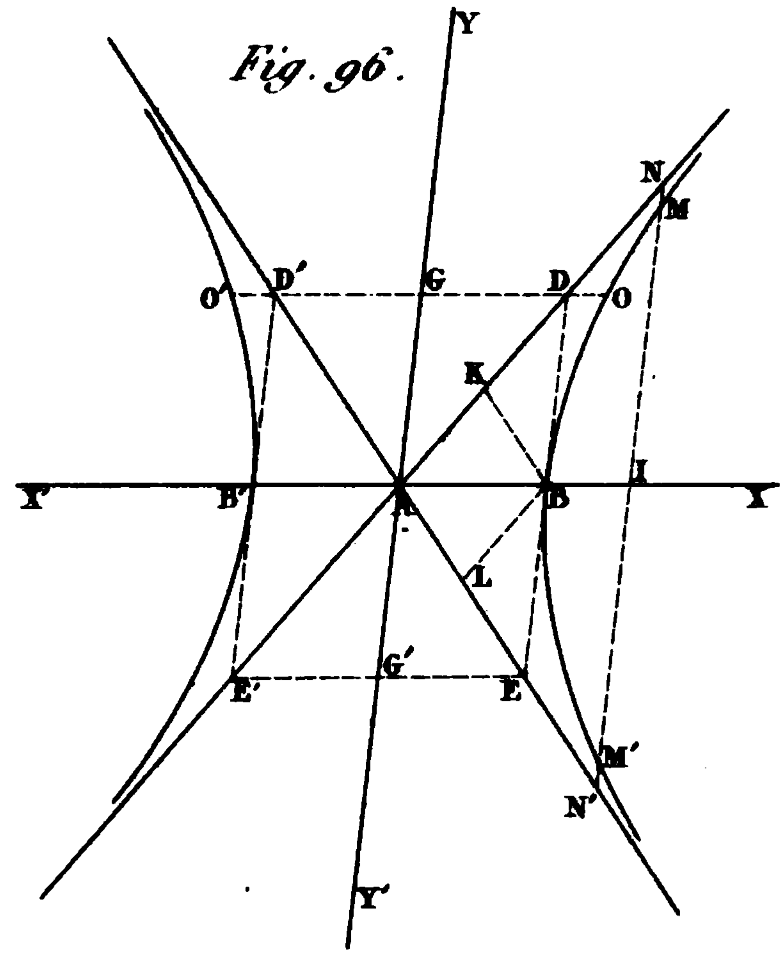


Fig. 96.



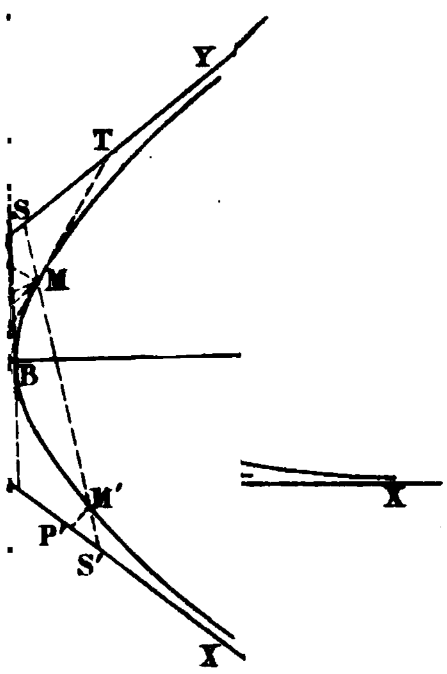


Fig. 101.

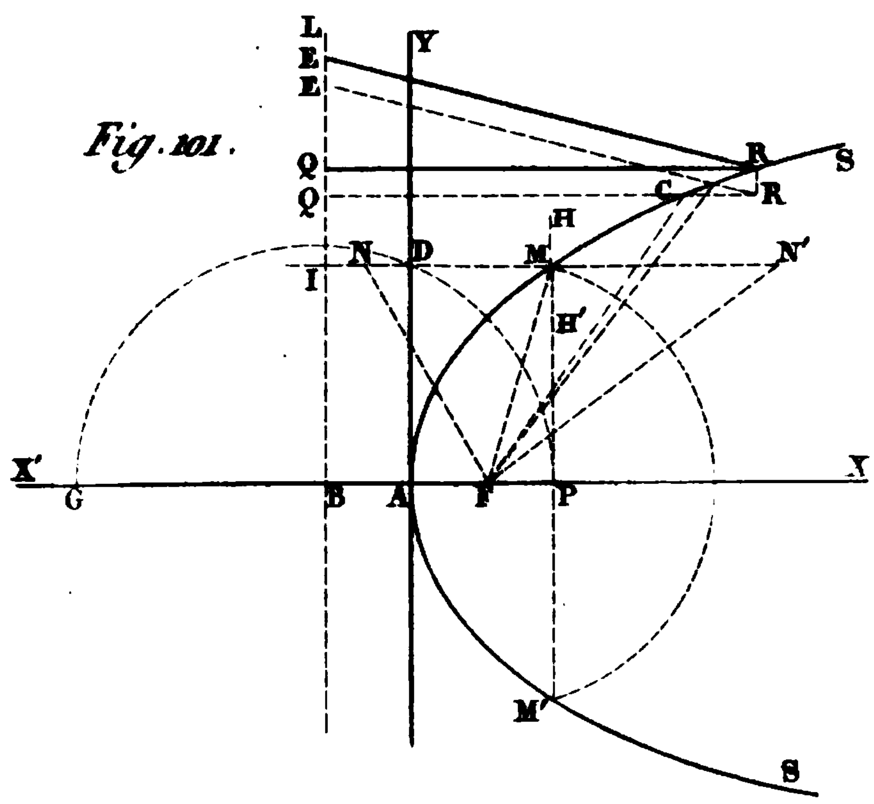


Fig. 102.

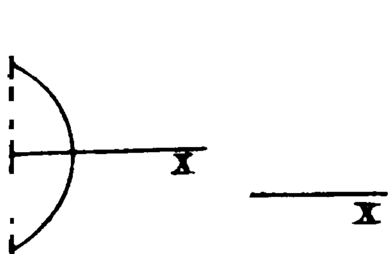
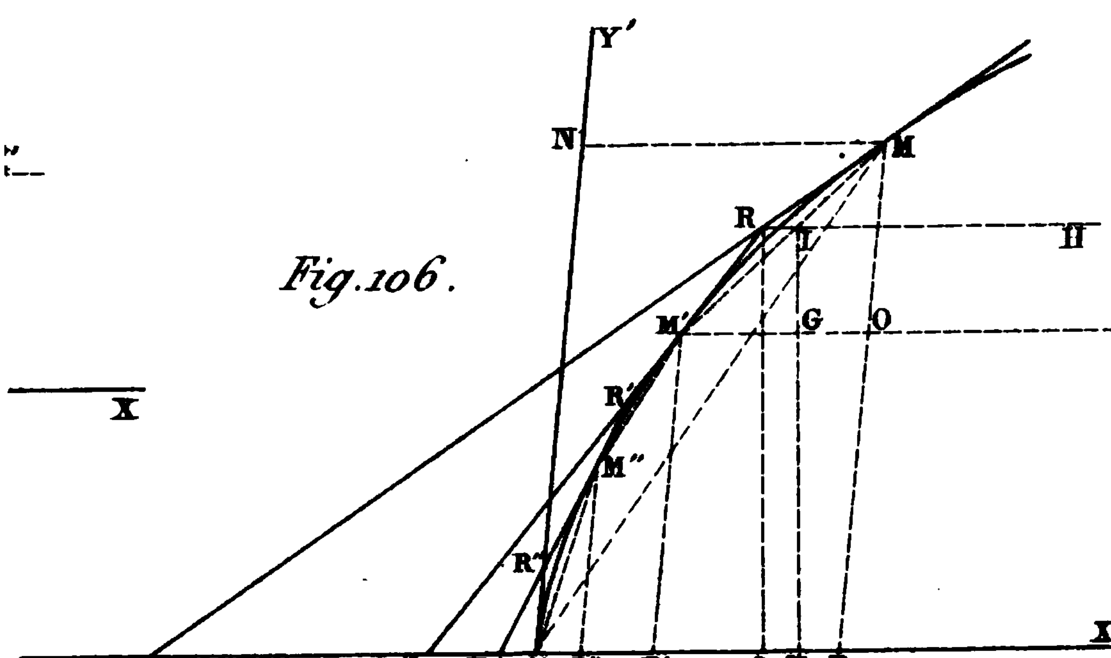
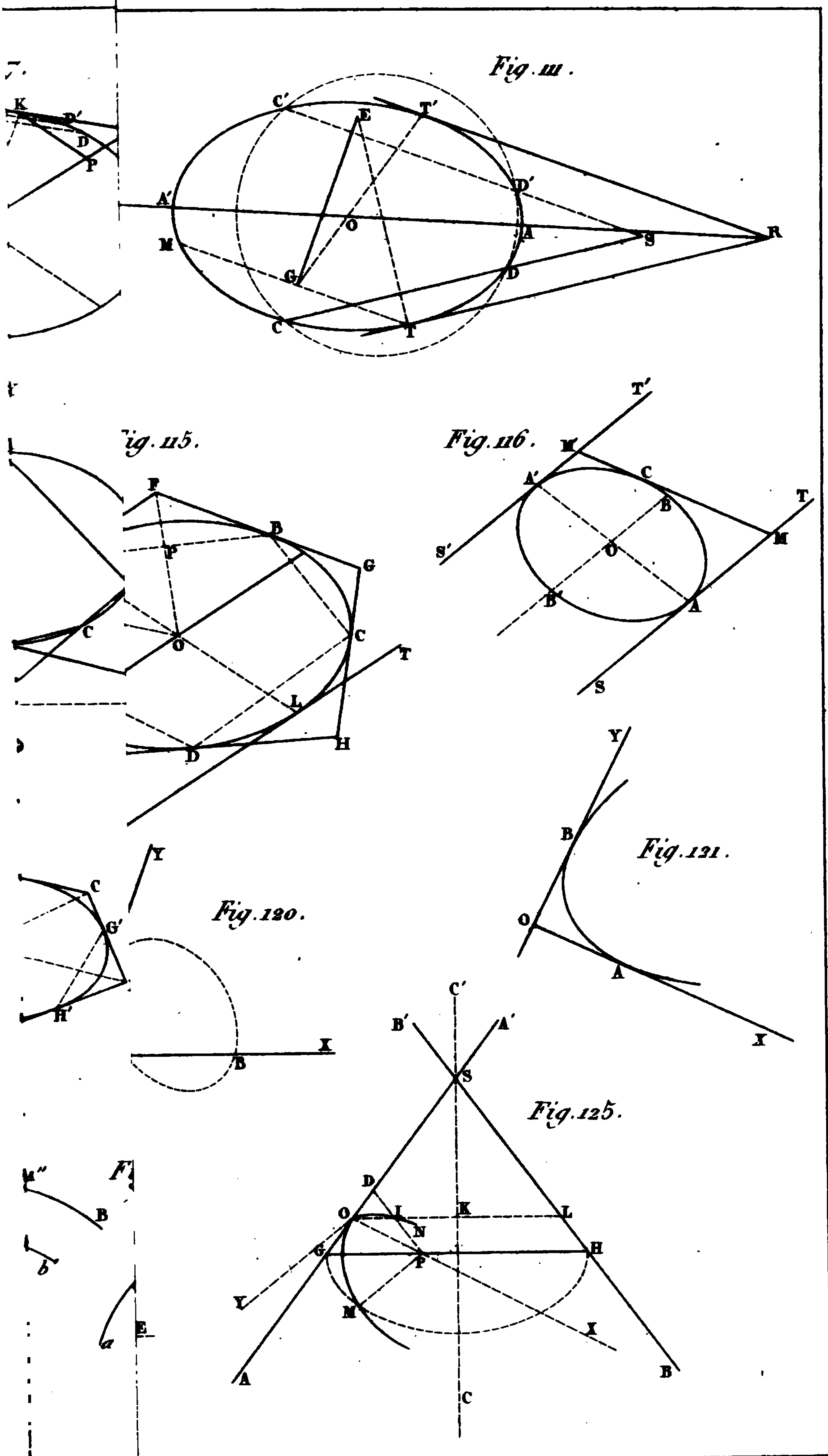


Fig. 106.



Dulos sc.



Dulos sc.

130.

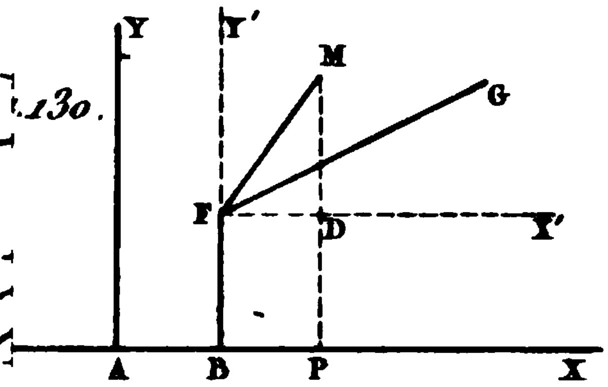


Fig. 131.

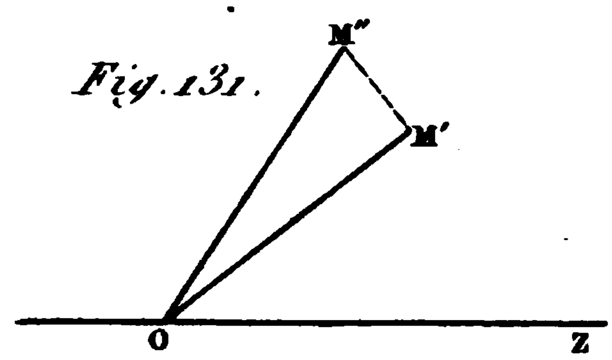


Fig. 137.

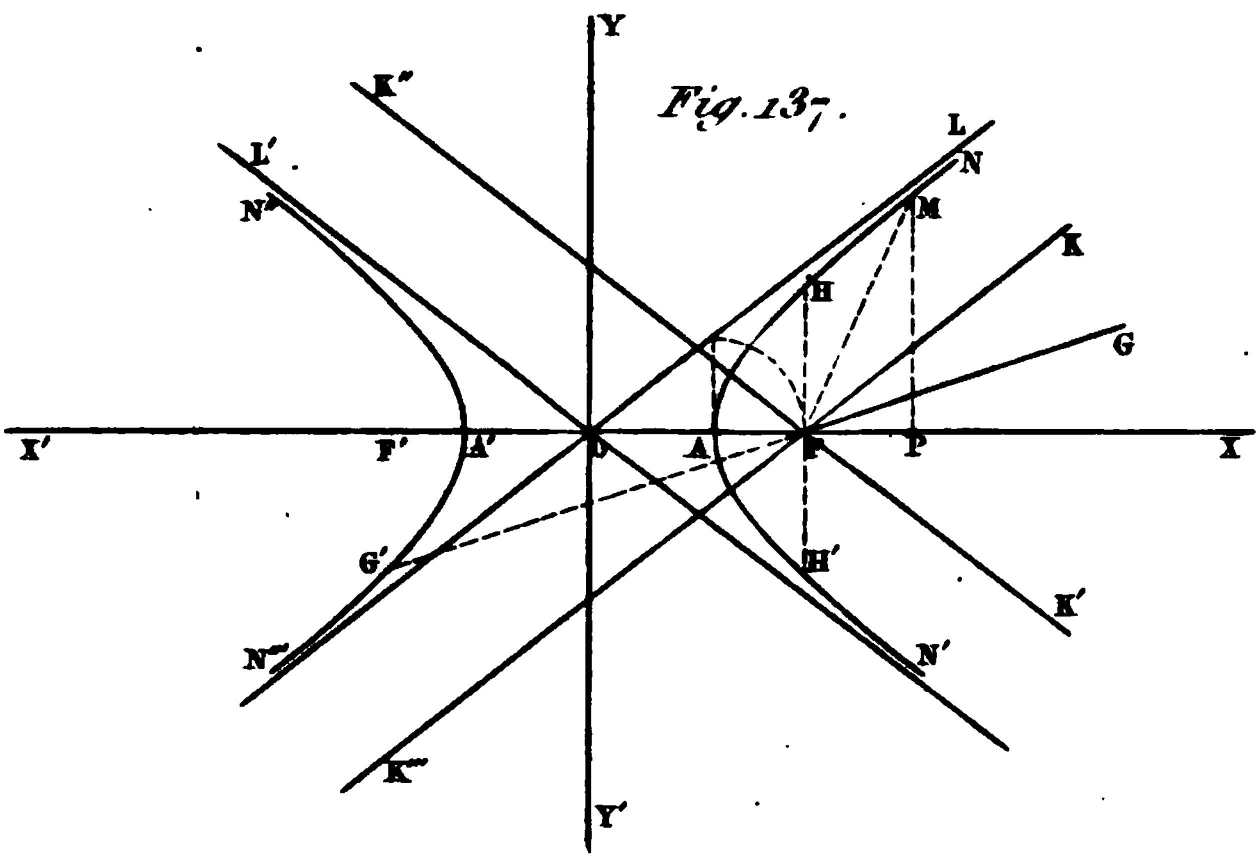


Fig. 142.

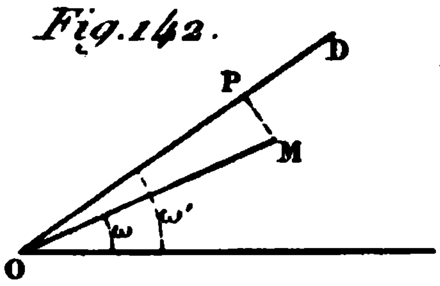


Fig. 143.

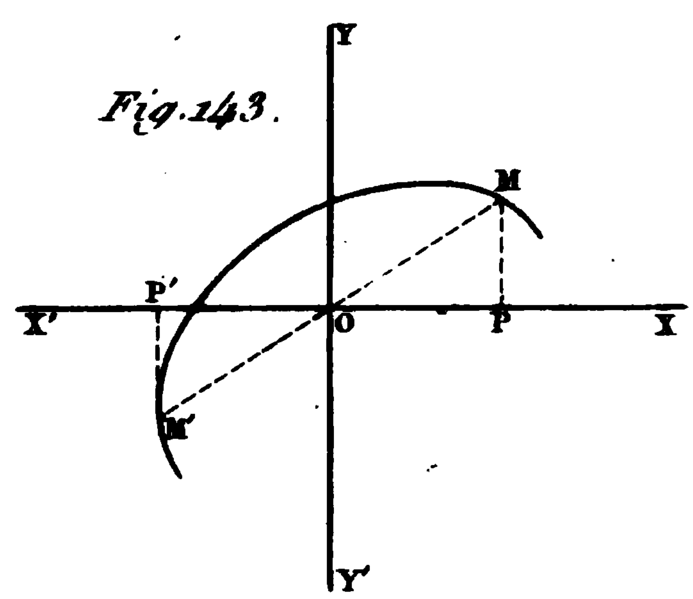


Fig. 148.

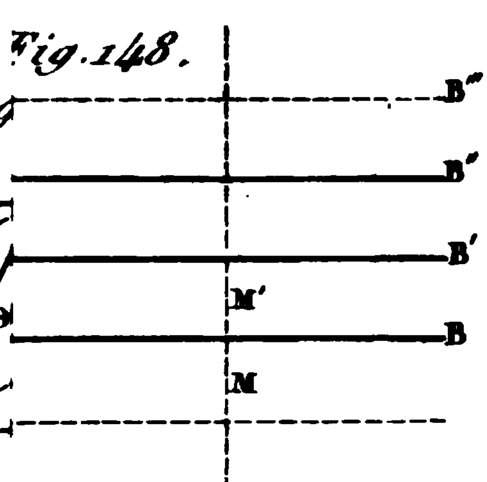
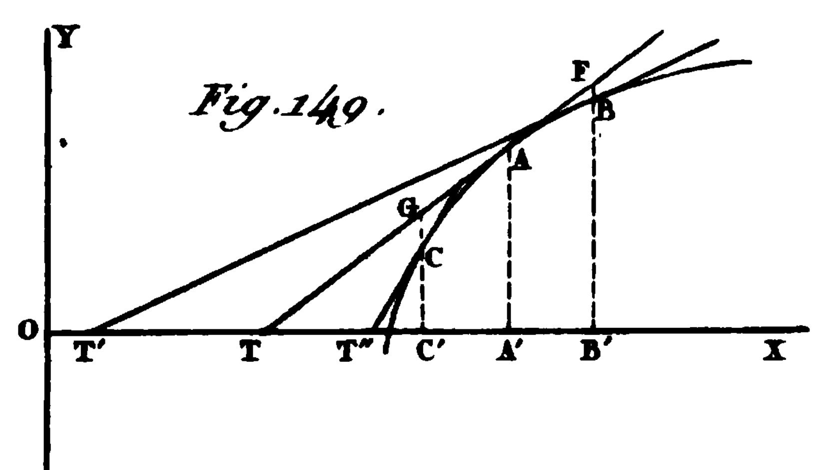


Fig. 149.



Dulos sc.

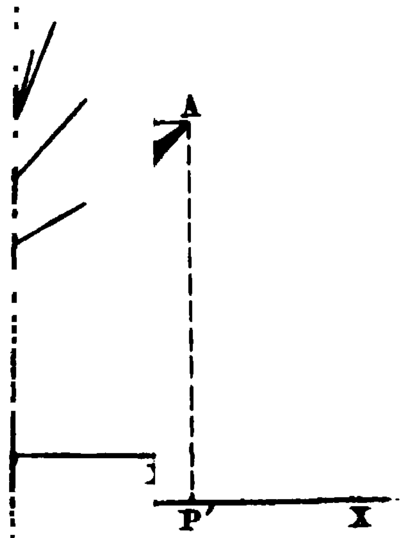


Fig. 154.

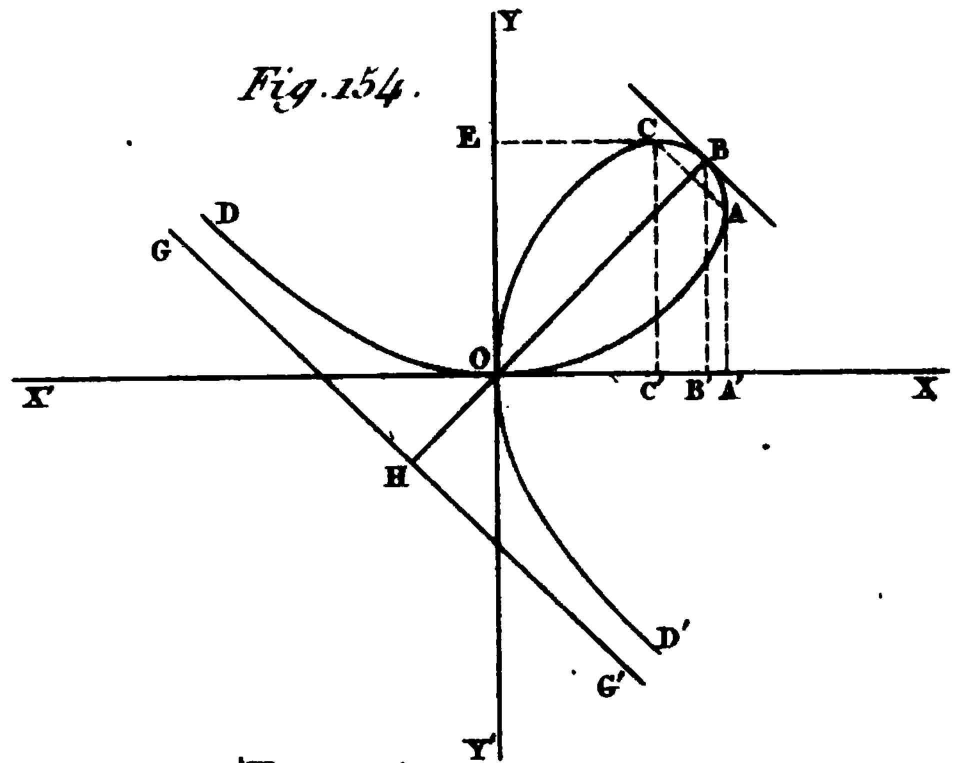


Fig. 156.

.158.

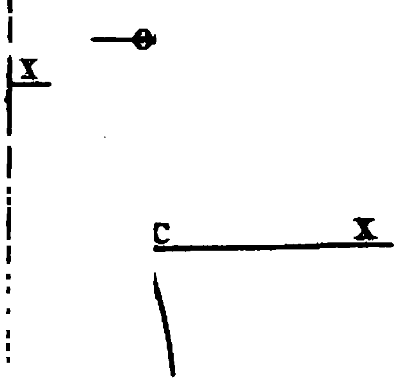
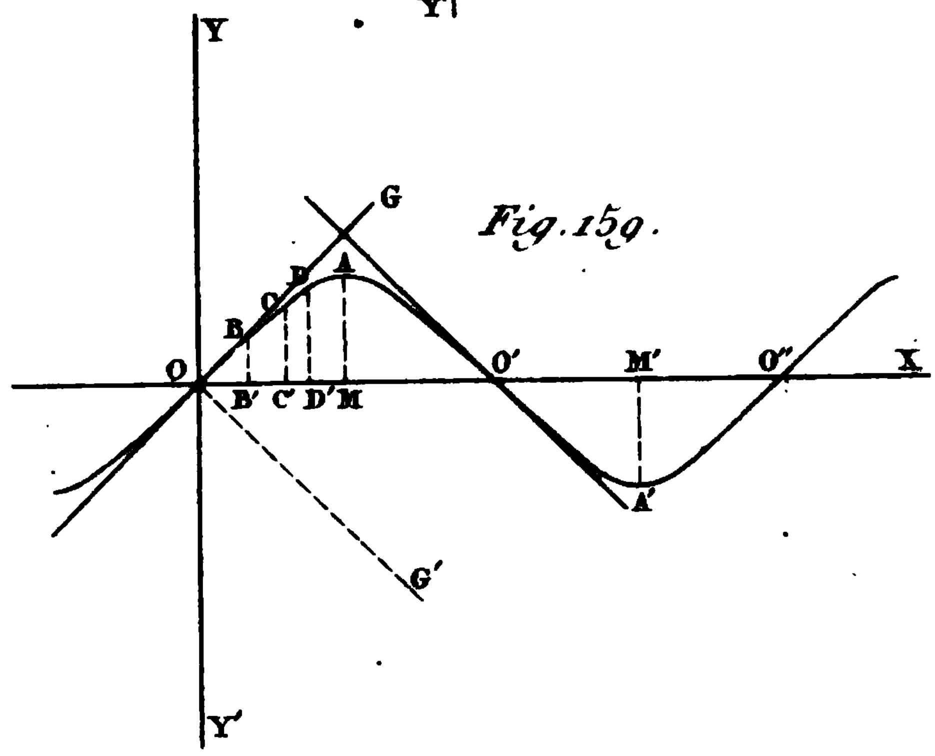
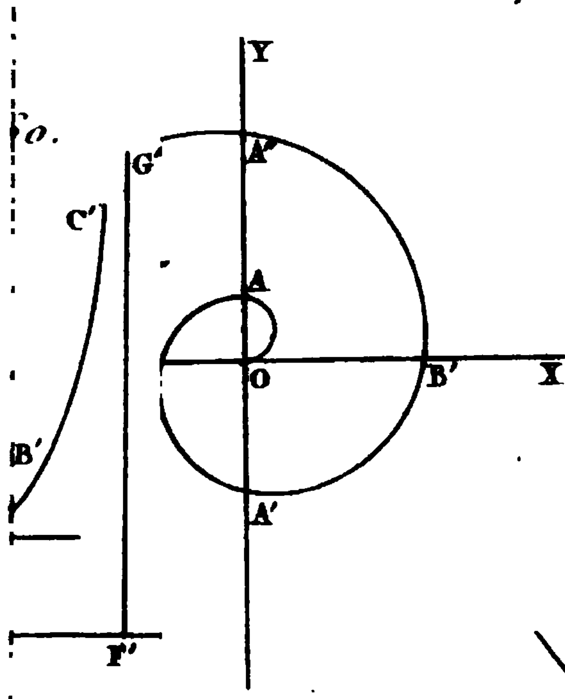


Fig. 159.



o.



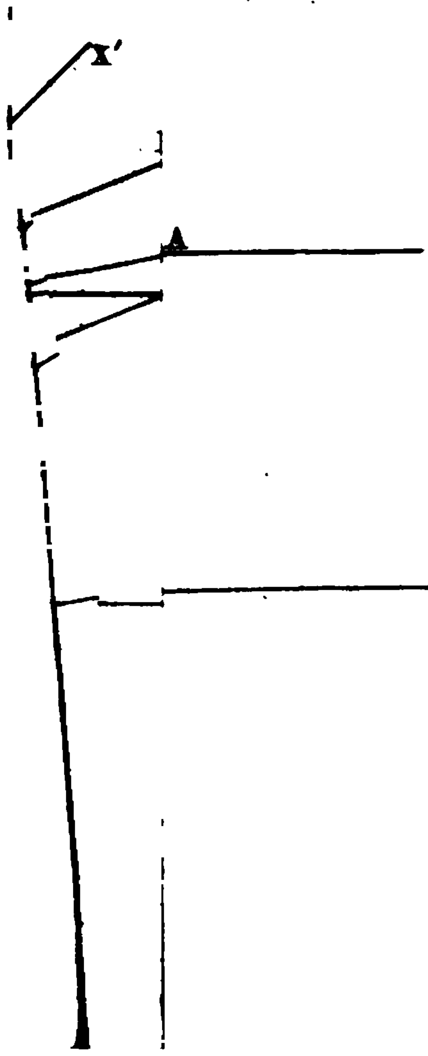
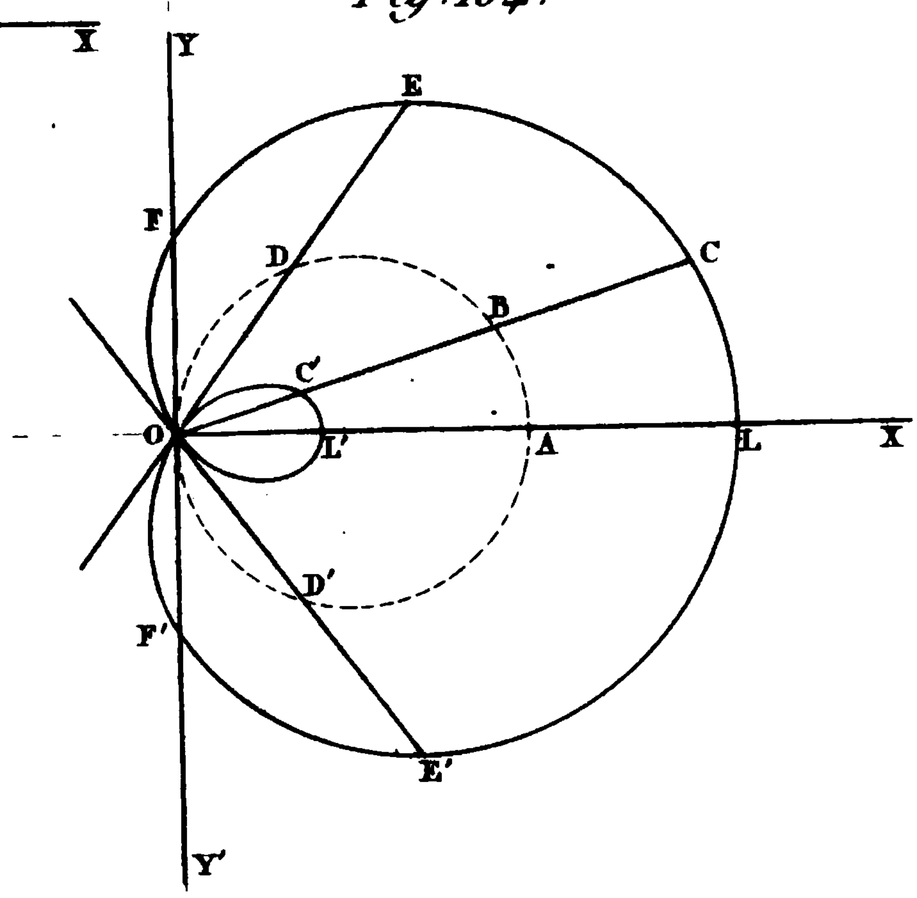
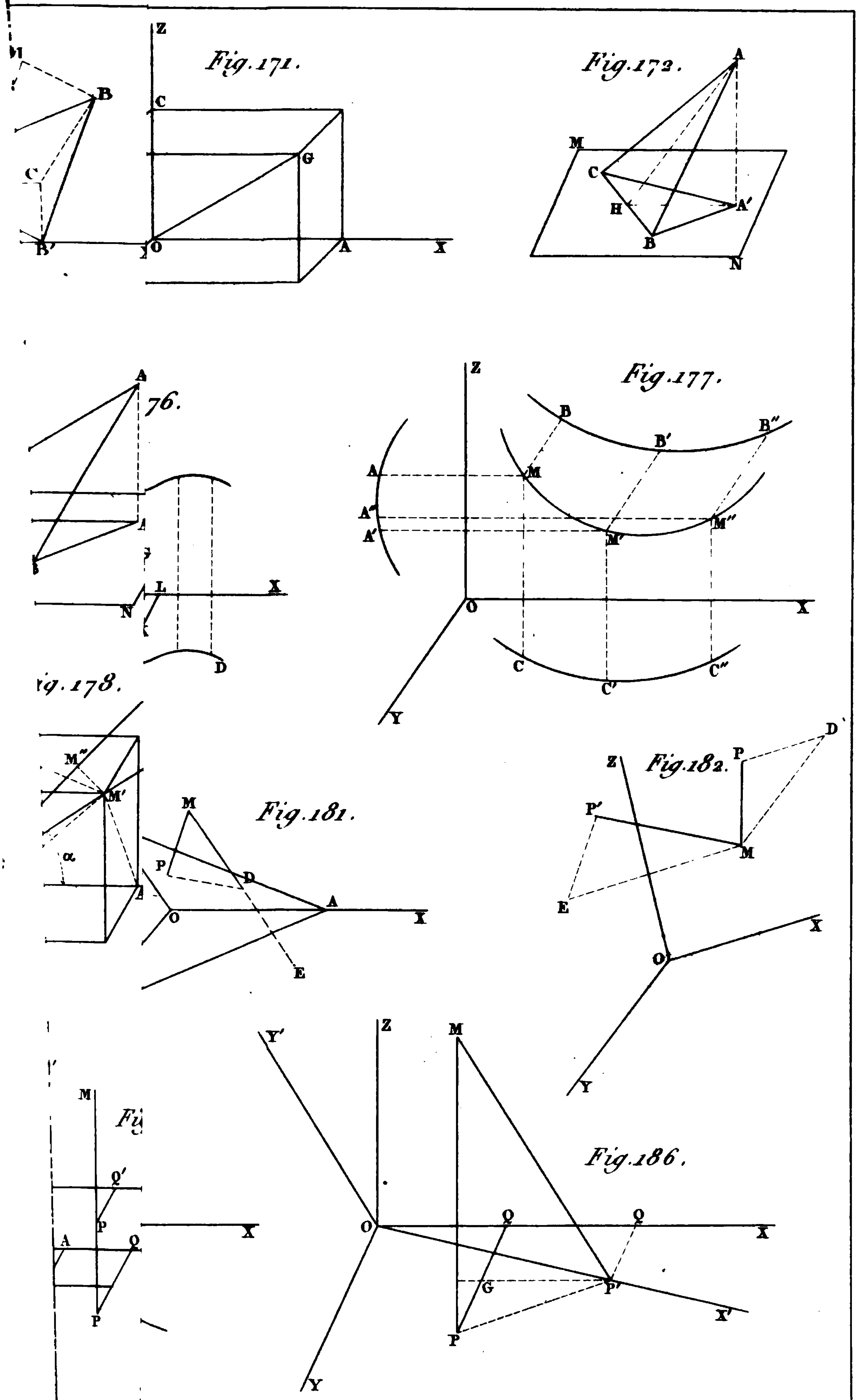


Fig. 164.



Dulos sc.



aucon, 1.　　　Dulos sc.

Pl. XI.

Fig. 190.

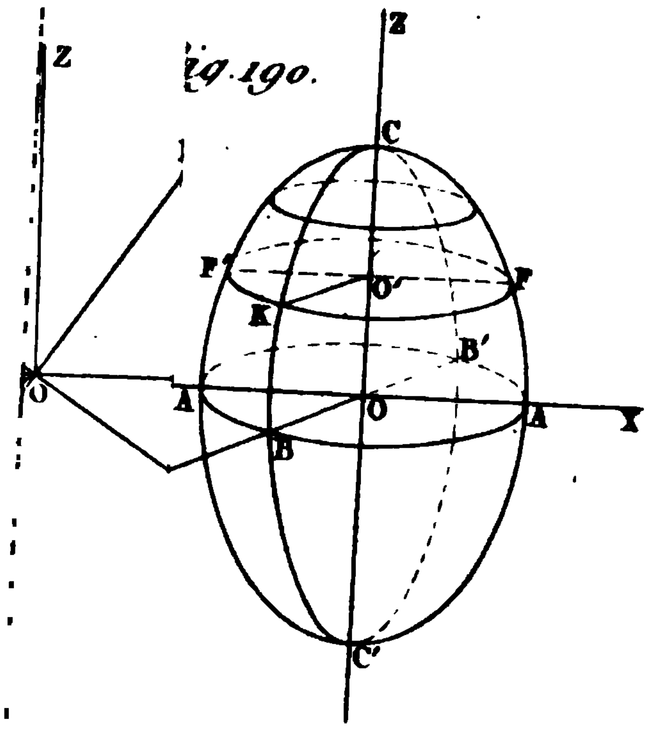


Fig. 191.

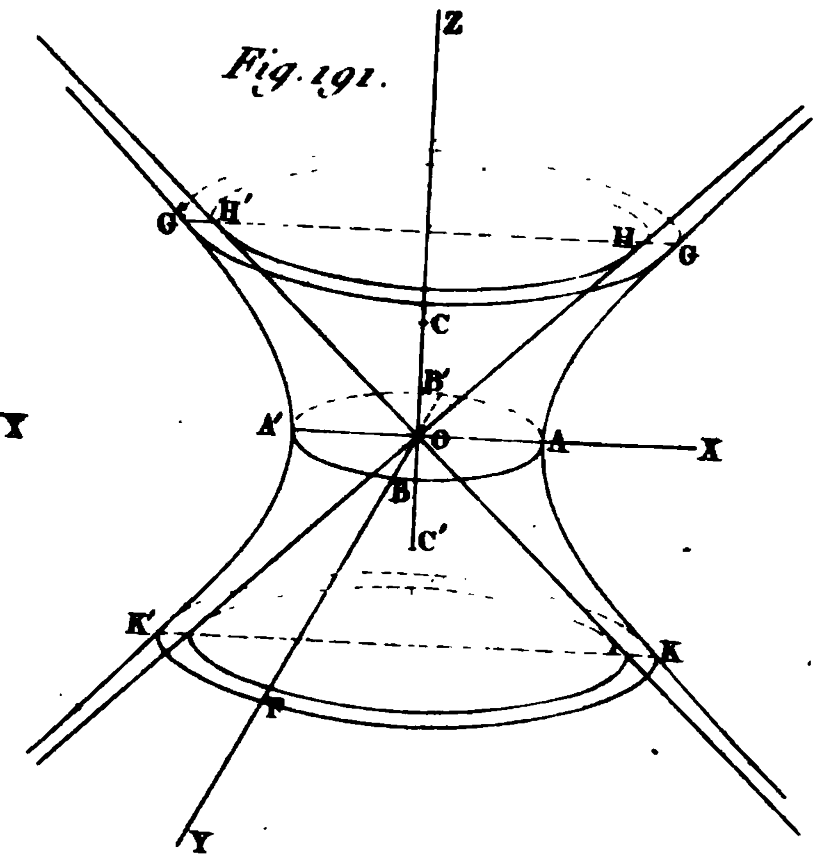


Fig. 192.

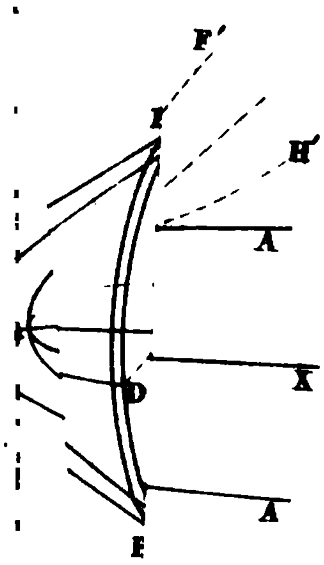
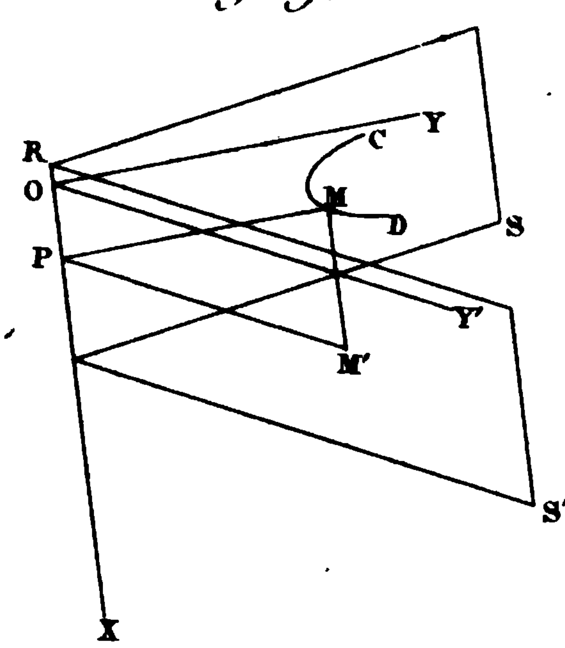


Fig. 195.



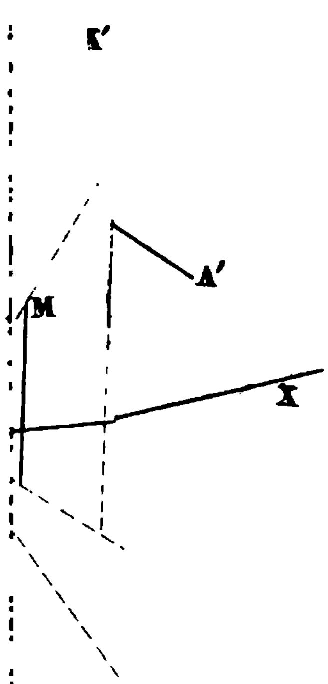
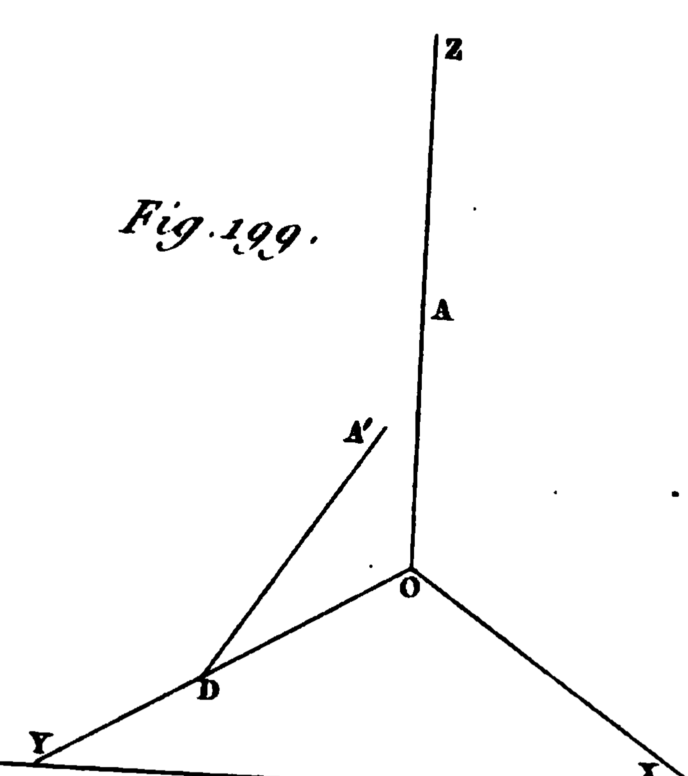


Fig. 199.



ontfaucon

Dulos sc.